

1) Le travail de la force de tension lors d'un déplacement de l_1 à l_2 est indépendant du chemin suivi par M

En effet, $W = -k \int_{l_1}^{l_2} (l - l_0) dl = -\frac{k}{2} ((l_2 - l_0)^2 - (l_1 - l_0)^2) = -\Delta \mathcal{E}_p$ avec $\mathcal{E}_p = \frac{k}{2} (l - l_0)^2 = \frac{\sigma T^2}{2}$

2) La longueur du ressort étant $x_1 - x_2$, la force en M a pour expression $\vec{T}_{\rightarrow M} = -k(x_1 - x_2 - l_0)\vec{e}_x$
Celle en P est l'opposée. On applique le P.F.D. à chaque point et après projection sur (Ox) , on a

$$m_1 \ddot{x}_1 + \lambda_1 \dot{x}_1 + k(x_1 - x_2 - l_0) = 0 \quad m_2 \ddot{x}_2 + \lambda_2 \dot{x}_2 + k(x_2 - x_1 + l_0) = 0$$

3) On reporte les solutions sous la forme envisagée et on obtient deux conditions vérifiées **pour tous t** :

$$\begin{cases} (m_1 \mu^2 a_1 + \lambda_1 \mu a_1 + k(a_1 - a_2))e^{\mu t} + k(x_{01} - x_{02} - l_0) = 0 \\ (m_2 \mu^2 a_2 + \lambda_2 \mu a_2 + k(a_2 - a_1))e^{\mu t} + k(x_{02} - x_{01} + l_0) = 0 \end{cases} \rightarrow x_{01} - x_{02} = l_0$$

La longueur du ressort oscille autour de l_0 ou si on préfère, son élongation oscille autour de 0.

4) On reconnaît un système de Cramer homogène $\begin{cases} (m_1 \mu^2 + \lambda_1 \mu + k)a_1 - k a_2 = 0 \\ -k a_1 + (m_2 \mu^2 + \lambda_2 \mu + k)a_2 = 0 \end{cases}$ qui admet des solutions non nulles ssi $(m_1 \mu^2 + \lambda_1 \mu + k)(m_2 \mu^2 + \lambda_2 \mu + k) - k^2 = 0$ (Déterminant de la matrice nul)

5) $(m\mu^2 + k)^2 = k^2 \rightarrow \mu = 0$ ou $\mu = i\sqrt{\frac{2k}{m}}$ Le premier cas est l'équilibre ($a_1 = a_2$)

Le second correspond aux oscillations à la pulsation $\sqrt{\frac{2k}{m}}$ en opposition de phase ($a_1 = -a_2$)

$$6) \vec{T}_{1 \rightarrow A} = -k_1(x_A - x_P - l_{01})\vec{e}_x = -T\vec{e}_x \quad \vec{T}_{2 \rightarrow A} = k_2(x_M - x_A - l_{02})\vec{e}_x = T\vec{e}_x$$

Ces deux forces sont opposées car la masse de A est négligeable.

En exprimant la différence $\frac{\vec{T}_{2 \rightarrow A}}{k_2} - \frac{\vec{T}_{1 \rightarrow A}}{k_1}$, on en déduit que $\frac{(\sigma_1 + \sigma_2)T}{\sigma} = \frac{x_M - x_P}{l} - \frac{(l_{01} + l_{02})}{l_0}$

7) Les deux ressorts en *parallèle* ont même longueur au repos et même élongation. Les forces de tension s'ajoutent et ainsi $\vec{T} = (k_1 + k_2)(l - l_0)\vec{e}_x$ La raideur équivalente est donc $k = k_1 + k_2$

8) En électricité, la conductance d'un élément sous modèle unidirectionnel est $G = \frac{Y S}{L}$

$[E] = [k].L^{-1} = M.T^{-2}.L^{-1}$ Homogène à **une pression**

9) $dM = \frac{M}{L} dr$ On applique la relation 1 à Σ , dr jouant le rôle de L : $d\sigma = d\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{dr}{Es}$

10) Cette force correspond à celle exercée en P par le ressort de la figure 2 :

$$\vec{T}(r) = \frac{Es}{k} \left(\underbrace{r + dr + \xi(r + dr)}_{\text{"}x_1\text{"}} - \underbrace{(r + \xi(r))}_{\text{"}x_2\text{"}} - \underbrace{dr}_{\text{"}l_0\text{"}} \right) \vec{e}_r \rightarrow T(r) = \frac{Es}{dr} \frac{d\xi}{dr} dr = Es \frac{d\xi}{dr}$$

11) Dans le référentiel de la tige non galiléen, Σ subit selon \vec{e}_r deux forces de tension ($-T(r)$ exercée par la partie intérieure et $T(r + dr)$ exercée par la partie extérieure) et la force d'inertie d'entraînement.

A l'équilibre relatif, $T(r + dr) - T(r) + dM r \omega_0^2 = 0 \rightarrow \frac{d^2 \xi}{dr^2} = -\frac{M \omega_0^2}{LEs} r$

12) Il y a toujours de la matière en $r = 0$ donc $\xi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. L'extrémité de la tige ne subit que deux forces, la force de tension $-T(L)$ et $dM L \omega_0^2 \rightarrow T(L)$ infiniment petit d'ordre 1 en $dr \rightarrow \left(\frac{d\xi}{dr}\right)_{r=L} = \mathbf{0}$

$$\xi(r) = -\frac{M\omega_0^2}{6LES} r^3 + \frac{ML\omega_0^2}{2ES} r$$

$$T(\mathbf{0}) = \frac{ML\omega_0^2}{2} \quad \text{On reconnaît la norme de la résultante des forces d'inertie } F_{ie} = \omega_0^2 \int_0^L r dM = \frac{M\omega_0^2}{L} \int_0^L r dr$$

La tension est maximale en $r = 0$ et la déformation est maximale en $r = L$ ($\xi(L) = \frac{ML^2\omega_0^2}{3ES}$)

13-14) $M \cdot T^{-2} \cdot L^{-1} = M^\alpha \cdot (M \cdot L^2 \cdot T^{-1})^\beta \cdot L^\gamma \rightarrow \beta = 2 ; \alpha = -1 ; \gamma = -5 \quad a \sim 3 \cdot 10^{-10} \text{ m} \rightarrow E \sim 10^{11} \text{ Pa}$

15) La densité de probabilité de présence de la particule est $|\Psi|^2$, c'est-à-dire que la probabilité de trouver la particule en $\vec{r}(x, y, z)$ à $dx dy dz$ près est égale à $|\Psi|^2(\vec{r}) dx dy dz \rightarrow [\Psi] = L^{-3/2}$

16) On reporte la solution sous la forme envisagée dans l'équation (2) et on obtient une égalité entre deux fonctions, l'une dépendant de \vec{r} et l'autre de t , deux variables indépendantes. Cette égalité étant vérifiée pour tous \vec{r} et pour tous t , cela signifie que chaque fonction est en définitive une constante :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta\Phi(\vec{r})}{\Phi(\vec{r})} + U(\vec{r}) = \frac{j\hbar}{W(t)} \frac{dW}{dt} = cste = \mathcal{E} \rightarrow W(t) = \exp\left(-j \frac{\mathcal{E}}{\hbar}\right) \quad \text{On reconnaît en cette constante l'énergie } \mathcal{E} \text{ de la particule (analyse dimensionnelle, conservation, relation de de Broglie ...)}$$

Ce type de solution correspond à un **état stationnaire**, un état pour lequel $|\Psi|^2$ est indépendant du temps.

17) Là encore, on reporte la solution envisagée dans l'équation ci-dessus et on aboutit à une somme de trois fonctions dépendant de trois variables indépendantes (x, y, z) . Cette somme étant constante pour tous x, y et z , cela signifie que chaque fonction $\frac{F_i''}{F_i}$ est une constante C_i . Afin de satisfaire les conditions aux limites ($\Phi(0, y, z) = \Phi(a_1, y, z) = \Phi(x, 0, z) = \Phi(x, a_2, z) = \Phi(x, y, 0) = \Phi(x, y, a_3) = 0$) chaque F_i est sinusoidale ce qui nécessite que les trois constantes C_i sont négatives de la forme $-\frac{n_i^2 \pi^2}{a_i^2}$.

$$\frac{F_1''}{F_1(x)} + \frac{F_2''}{F_2(y)} + \frac{F_3''}{F_3(z)} = \frac{2m}{\hbar^2} (U_0 - \mathcal{E}) = cste \rightarrow \frac{F_i''}{F_i} = -\frac{n_i^2 \pi^2}{a_i^2} \rightarrow F_i = \sin\left(\frac{n_i \pi}{a_i} (x \text{ ou } y \text{ ou } z)\right)$$

18) L'état fondamental étant défini par le triplet d'entier $(1, 1, 1)$, la relation (3) est directement issue de ce qui précède : $-\frac{\pi^2}{a_1^2} - \frac{\pi^2}{a_2^2} - \frac{\pi^2}{a_3^2} = \frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} (U_0 - \mathcal{E}_f) \rightarrow \mathcal{E}_f = U_0 + \frac{\hbar^2}{8m} \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_3^2}\right)$

[Toute cette section est traitée dans l'exercice 5 du TD Physique quantique]

$$\mathbf{19-20)} \quad \Delta\mathcal{E}_1 = \frac{\hbar^2}{8m} \left(\frac{1}{(a-\delta a)^2} + \frac{2(a-\delta a)}{a^3} - \frac{3}{a^2}\right) = \frac{\hbar^2}{8ma^2} \left(\left(1 - \frac{\delta a}{a}\right)^{-2} + 2\left(1 - \frac{\delta a}{a}\right) - 3\right) = \frac{1}{2} \frac{3\hbar^2}{4ma^4} \delta a^2$$

$$\mathbf{21-22)} \quad N = \frac{sL}{a^3} \quad \text{Le nombre de cubes selon } (Ox) \text{ est inchangé : } \frac{L}{a} = \frac{L-\delta L}{a-\delta a} \rightarrow \delta a = a \frac{\delta L}{L}$$

$$\mathbf{23-24)} \quad \Delta\mathcal{E}_t = \frac{N}{2} K \delta a^2 = \frac{sK}{2aL} \delta L^2 \rightarrow F = \frac{sK}{aL} \delta L \rightarrow E = \frac{kL}{s} = \frac{K}{a} = \frac{3\hbar^2}{4ma^5} \quad \text{Conforme à la partie II.A}$$

25) On applique le P.F.D. à l'équilibre, la force de tension compense le poids. [Il est étonnant, voire gênant que l'axe (Oz) soit orienté vers le haut, je décide de **l'orienter vers le bas**, ainsi z est défini positif] :

$$k(z_0 - l_0) = mg \rightarrow \mathbf{z}_0 = \mathbf{l}_0 + \sigma \mathbf{m} \mathbf{g}$$

A une constante près, $\mathcal{E}_p = \frac{1}{2\sigma}(z - l_0)^2 - mgz' = \frac{1}{2\sigma}(z' + \sigma mg)^2 - mgz' = \frac{z'^2}{2\sigma} + cste$

26) On reconnaît le facteur de Boltzmann $\exp\left(-\frac{\mathcal{E}_p}{k_B\theta}\right) \rightarrow \gamma(\theta) = \frac{1}{2\sigma k_B\theta}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(z') dz' = 1 \rightarrow \zeta(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\gamma(\theta)z'^2) dz' = \sqrt{\frac{\pi}{\gamma(\theta)}} = \sqrt{2\pi\sigma k_B\theta}$$

27) Le déplacement aléatoire de la plaque se fait de part et d'autre de $z_0 \rightarrow \langle z' \rangle = 0$

$$28) \langle z'^2 \rangle = \frac{1}{\zeta(\theta)} \int_{-\infty}^{\infty} z'^2 \exp(-\gamma(\theta)z'^2) dz' = \frac{1}{2\zeta(\theta)} \sqrt{\frac{\pi}{\gamma^3(\theta)}} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi\sigma k_B\theta}} \sqrt{8\pi(\sigma k_B\theta)^3} = \sigma k_B\theta$$

Résultat tout à fait conforme au théorème d'équipartition, en effet on a bien $\langle \mathcal{E}_p(z') \rangle = \frac{k_B\theta}{2}$

[L'expérience de Kappler est l'objet d'étude de l'exercice 4 du TD Thermodynamique statistique]

29) C'est en 1828 que le botaniste **Robert Brown** publie un article dans lequel il décrit **le mouvement erratique de grains de pollen** dans l'eau observés au microscope. Les études théoriques sur le mouvement brownien, proposées par Albert Einstein en 1905 et complétées par celles de Paul Langevin en 1908, ont été spectaculairement confirmées par une série d'une dizaine d'expériences réalisées entre 1907 et 1909 par **Jean Perrin**. Ces études sont les piliers de l'acceptation de l'existence des atomes par la communauté scientifique. Elles ont clos la controverse atomiste ouverte par les Grecs six siècles avant notre ère !

Après avoir pris connaissance des résultats de Perrin, en 1908, l'un des derniers farouches anti atomistes, Wilhelm Ostwald, déclare *"Je suis désormais convaincu que nous sommes entrés en possession de preuves expérimentales du caractère discret ou granulaire de la nature, que l'hypothèse atomique avait cherchées en vain depuis des millénaires"*.

Pour réaliser ses expériences, Jean Perrin utilisa des grains de gomme-gutte. **Il étudia leur sédimentation et leur diffusion**. Concernant la sédimentation, il lâcha sans vitesse initiale à la surface d'un récipient, un grand nombre de grains dans de l'eau et observa que même au bout d'une longue durée, **les grains ne se tassaient pas au fond du récipient** mais se répartissaient sur l'ensemble de la hauteur avec **une densité non uniforme**.

Ces travaux, tout comme le modèle développé par Langevin, s'appuient entièrement sur les modèles microscopiques de Ludwig Boltzmann. Les résultats des expériences permirent notamment de mesurer la constante de Boltzmann. Malheureusement, en 1906, donc peu de temps avant la publication de ces travaux, Boltzmann se suicida, las des critiques et des attaques des disciples d'Ostwald ...

[Tout ce paragraphe est tiré du sujet CCMP 1 2021 consacré aux expériences de Jean Perrin. Vous pouvez retrouver également cette étude dans l'exercice 9 du TD Thermodynamique statistique]