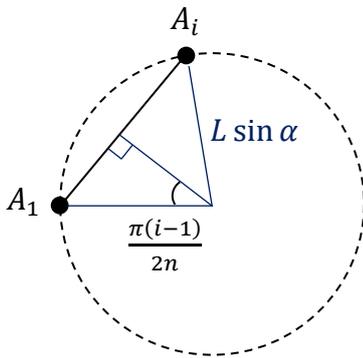


1) Si l'araignée est une boule d'eau de rayon $r = 1 \text{ mm}$, on obtient $m = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_e \sim 4 \text{ mg}$

2) La norme du champ entre les armatures d'un condensateur plan a pour expression $\frac{|\sigma|}{\epsilon_0} \rightarrow \sigma = -\epsilon_0 E_0$
 $\rightarrow \sigma \sim -10^{-9} \text{ C.m}^{-2}$ Si le champ était uniforme, on aurait une différence de potentiel égale à $E_0 z_0 = 7,2 \text{ MV}$ entre l'ionosphère et le sol, le modèle **n'est pas valide**.

3) Choisissons le potentiel créé en A_1 , par symétrie on a $V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2}{A_1 A_2} + \frac{2}{A_1 A_3} + \dots + \frac{2}{A_1 A_n} + \frac{1}{A_1 A_{n+1}} \right)$

Chaque $A_1 A_i$ avec $2 \leq i \leq n$ est la base d'un triangle isocèle : $A_1 A_i = 2L \sin \alpha \sin \left(\frac{\pi(i-1)}{2n} \right)$



De plus, $A_1 A_{n+1} = 2L \sin \alpha$

En posant $k = i - 1$

$$V = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 L \sin \alpha} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{\sin \left(\frac{\pi k}{2n} \right)} + 1 \right)$$

L'énergie d'interaction de deux charges (q_1, q_2) est $\mathcal{E}_p = q_2 V_{1 \rightarrow 2}$ En effet, il est inutile de compter deux fois la même énergie ($q_1 V_{2 \rightarrow 1} = q_2 V_{1 \rightarrow 2}$) car l'énergie d'interaction entre deux charges correspond à l'énergie nécessaire pour déplacer **l'une** des deux charges, de l'infini à la distance r de l'autre.

Pour trois charges, \mathcal{E}_p correspond à l'énergie nécessaire pour déplacer **deux** des trois charges (2 et 3) de l'infini à la distance r_{12} et r_{13} de la charge 1 et r_{23} entre elles $\rightarrow \mathcal{E}_p = q_2 V_{1 \rightarrow 2} + q_3 V_{1 \rightarrow 3} + q_3 V_{2 \rightarrow 3}$

Pour n charges, $\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} \sum_i q_i \sum_{j \neq i} V_{j \rightarrow i}$ Dans notre cas, $\sum_{j \neq i} V_{j \rightarrow i} = V \rightarrow \mathcal{E}_p = nqV$

\mathcal{E}_p est minimale en $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (Equilibre stable)

Ici $\mathcal{E}_p > 0$, l'interaction est répulsive, \mathcal{E}_p représente l'énergie libérée par le système si on éloigne les n charges à l'infini l'une de l'autre.

Lorsque $\mathcal{E}_p < 0$, l'interaction est attractive, $-\mathcal{E}_p$ représente alors l'énergie nécessaire pour éloigner les n charges à l'infini l'une de l'autre.

4) L'énergie cinétique de chaque masse est $\frac{m}{2} \left(\frac{L}{2} \dot{\alpha} \right)^2$, soit pour les $2n$ masses $\mathcal{E}_c = \frac{nmL^2}{4} \dot{\alpha}^2$

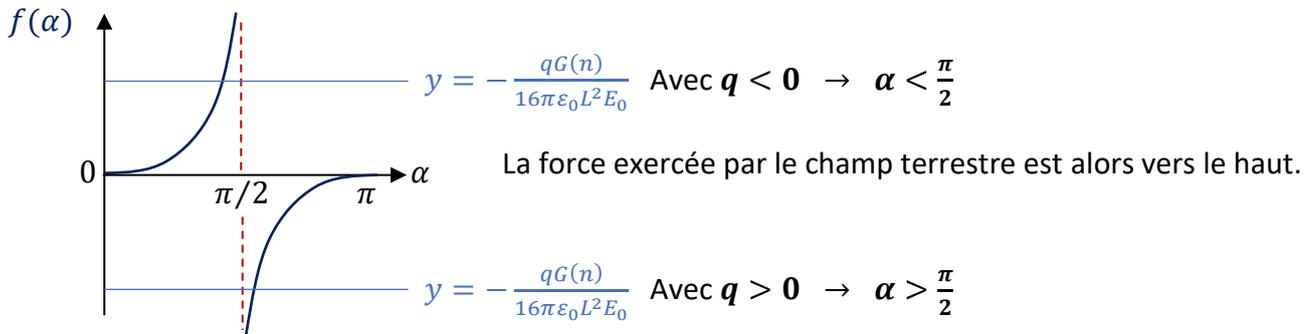
Le système est conservatif, $\mathcal{E}_p + \mathcal{E}_c = cste \rightarrow -\frac{q^2 \cos \alpha}{8\pi\epsilon_0 L \sin^2 \alpha} G(n) + \frac{mL^2}{2} \ddot{\alpha} = 0$

Posons $\varepsilon = \alpha - \frac{\pi}{2} \ll 1$, on obtient au premier ordre en $\varepsilon \rightarrow \ddot{\varepsilon} + \frac{q^2 G(n)}{4\pi\epsilon_0 mL^3} \varepsilon = 0 \rightarrow T = \frac{4\pi}{|q|} \sqrt{\frac{\pi\epsilon_0 mL^3}{G(n)}}$

5) En notant z la coordonnée verticale ascendante avec pour origine S , le potentiel $V_0(z)$ associé à \vec{E}_0 a pour expression (à une constante près) : $V_0(z) = E_0 z = E_0 L \cos \alpha$

Ainsi $\mathcal{E}_p = nqV + 2nqE_0L \cos \alpha = nq \left(\frac{qG(n)}{8\pi\epsilon_0L \sin \alpha} + 2E_0L \cos \alpha \right)$

A l'équilibre, α est solution de l'équation $\frac{d\mathcal{E}_p}{d\alpha} = 0 \rightarrow \frac{\sin^3 \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{qG(n)}{16\pi\epsilon_0L^2E_0}$ Traçons la fonction $f(\alpha) = \frac{\sin^3 \alpha}{\cos \alpha}$



Plus $|q|$ et n sont grands, plus α est proche de $\frac{\pi}{2}$. Plus L et E_0 sont grands, plus α est proche de 0 ou π .

$f(30^\circ) = \frac{1}{4\sqrt{3}} \rightarrow q = -\frac{12\pi\epsilon_0L^2E_0}{38} \sim -10^{-9} \text{ C}$ Ceci est confirmé par la question 6 !

6) Par symétrie, la somme des forces intérieures est nulle. La force extérieure due à \vec{E}_0 est de l'ordre de $2,4 \cdot 10^{-7} n \text{ N}$. Elle doit compenser le poids de l'araignée qui vaut environ $4 \cdot 10^{-5} \text{ N}$.

→ Plus **d'une centaine de fils** seraient nécessaires, le décollage nécessite un champ E_0 plus intense.

7) Dans l'espace vide de charge, $\text{div } \vec{E} = 0 \Leftrightarrow \text{div } \overrightarrow{\text{grad}} V = 0 \Leftrightarrow \Delta V = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0$
Le souci est que le gradient en coordonnées cylindriques était donné mais pas la divergence, ni le laplacien ...

Si $V(r, \theta) = \tilde{V} + f(r)g(\theta) \rightarrow \frac{g(\theta)}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) + \frac{f(r)}{r^2} \frac{d^2g}{d\theta^2} = 0 \rightarrow \frac{r}{f(r)} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) = -\frac{1}{g(\theta)} \frac{d^2g}{d\theta^2} = \text{cste}$

Les conditions en $\theta = 0$ et $\theta = \varphi$ imposent que la constante soit positive et donc égale à $\omega_n^2 \rightarrow \omega_n = \frac{n\pi}{\varphi}$

On cherche une solution de la forme $f(r) = r^\beta : \frac{r}{r^\beta} \frac{d}{dr} (\beta r^\beta) = \omega_n^2 \rightarrow \beta^2 = \omega_n^2 \rightarrow \beta = \omega_n \quad (r \rightarrow 0 !!)$

8) $\vec{E} = -\frac{\alpha_1\pi}{\varphi} r^{\left(\frac{\pi}{\varphi}-1\right)} \left(\sin\left(\frac{\pi\theta}{\varphi}\right) \vec{e}_r + \cos\left(\frac{\pi\theta}{\varphi}\right) \vec{e}_\theta \right)$ L'effet de pointe se produit si $\frac{\pi}{\varphi} - 1 < 0 \rightarrow \varphi > \pi$

9) $[E] = (M.L.T^{-2}).L^{-2} = M.L^{-1}.T^{-2}$ (Pression) $F = \frac{ES_0}{l_0} \delta l = k\delta l \rightarrow k = \frac{ES_0}{l_0}$

10) Pour de faibles élongations, $l = \sqrt{\frac{l_0^2}{4} + h^2} \sim \frac{l_0}{2} \left(1 + \frac{2h^2}{l_0^2} \right)$ L'élongation de chaque demi-fil vaut $\frac{h^2}{l_0}$

A l'équilibre, d'après la loi de Newton projetée sur z , $2F \frac{h}{l} = mg \rightarrow 4k \frac{h^3}{l_0^2} = mg$ (Terme en $\frac{h^5}{l_0^4}$ négligé)

11) La droite représentée figure 5 a bien pour pente $\frac{1}{3}$, cela confirme la loi de puissance $h^3 \propto m$.

La loi $h^3 = \frac{gl_0^2}{4k} m$ peut s'appliquer directement avec h en cm et m en mg (facteur 10^{-6} de part et d'autre)

Pour $m = 1 \text{ mg}$, $\ln(h) = -0,3 \rightarrow \ln\left(\frac{gl_0^2}{4k}\right) = -0,9 \rightarrow \frac{gl_0^2}{4k} = 0,4 \rightarrow k = 2 \cdot 10^{-2} \text{ N.m}^{-1} \rightarrow E = 10 \text{ MPa}$

Cette valeur est confirmée question 14 mais elle paraît bien plus faible que celles que l'on trouve dans la littérature. Il est probable que l'ordonnée sur la figure 5 soit plutôt $\ln(h/1 \text{ mm})$. D'ailleurs, il est étonnant de constater la bonne qualité de la régression linéaire alors que h n'est plus négligeable devant $\frac{l_0}{2} \dots ?$

La loi de puissance s'appliquerait alors de la façon suivante : $h^3 10^{-3} = \frac{gl_0^2}{4k} m$ avec h en mm et m en mg .

Toujours pour $m = 1 \text{ mg}$, $\ln\left(10^3 \frac{gl_0^2}{4k}\right) = -0,9 \rightarrow 10^3 \frac{gl_0^2}{4k} = 0,4 \rightarrow k = 2 \cdot 10^1 \text{ N} \cdot m^{-1} \rightarrow E = 10 \text{ GPa}$

Avec cette hypothèse, on trouverait l'ordre de grandeur du module de Young d'un fil de soie ...

12) Il y a conservation de l'énergie mécanique entre l'instant initial ($ma_{max} = 2k\Delta l$) et le moment où la vitesse est maximale ($\Delta l = 0, v_{max}$) : $k(\Delta l)^2 = \frac{1}{2}mv_{max}^2 \rightarrow \Delta l = \frac{v_{max}^2}{2a_{max}} \rightarrow k = \frac{ma_{max}^2}{2v_{max}^2}$

Si la vitesse $v(t) = v_{max} \sin(\omega t)$, la force $F(t) = ma(t) = ma_{max} \cos(\omega t)$. La puissance, proportionnelle au produit $\sin(\omega t) \cos(\omega t)$, est donc maximale en $\omega t = \frac{\pi}{4} \rightarrow \mathcal{P}_{max} = \frac{m}{2} v_{max} a_{max} = 8 \text{ mW}$

Cette puissance nécessite une masse musculaire de **quelques dizaines de milligrammes** : C'est impossible !

13) Deuxième loi de Newton projetée dans la base polaire : $l\ddot{\theta} = -g \sin \theta$ et $ml\dot{\theta}^2 = T - mg \cos \theta$
On intègre la première après avoir multiplié par $\dot{\theta}$: $l\dot{\theta}^2 = 2g \cos \theta \rightarrow T = 3mg \cos \theta \rightarrow T_{max} = 3mg$

14) Les N forces s'additionnent et les allongements sont identiques : $F = Nk\Delta l \rightarrow k_{\text{éq}} = Nk$

$$N_{min} = \frac{3mg}{k(\Delta l)_{max}} = \frac{3l_0 mg}{ES_0(\Delta l)_{max}} = \begin{cases} 3 \cdot 10^8 \text{ avec } E = 10 \text{ MPa} \rightarrow N_{min} \pi a^2 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2 \\ 3 \cdot 10^5 \text{ avec } E = 10 \text{ GPa} \rightarrow N_{min} \pi a^2 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \end{cases}$$

Le premier résultat n'est pas cohérent avec le diamètre des fils observés dans les films, le second oui !

15) $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dz)^2} = dx \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right)$ $\cos[\alpha(x, t)] = \frac{dx}{ds} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2$ $\sin[\alpha(x, t)] = \frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x}$

Le mouvement longitudinal étant négligé, on a $\begin{cases} 0 = T_x(x + dx, t) - T_x(x, t) \rightarrow T_x \text{ uniforme} \\ \mu ds \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T_z(x + dx, t) - T_z(x, t) \rightarrow \mu ds \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial T_z}{\partial x} dx \end{cases}$

Or $T_x(x, t) = T \cos[\alpha(x, t)]$ donc T est uniforme au deuxième ordre près en $\frac{\partial z}{\partial x}$.

16) De plus, $T_z(x, t) = T \sin[\alpha(x, t)] = T \frac{\partial z}{\partial x}$ et $ds = dx$ toujours au deuxième ordre près en $\frac{\partial z}{\partial x}$,

on en déduit que $\mu \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \rightarrow c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ **Célérité de l'onde sur le fil**

17) $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2(f'' + g'')$ et $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f'' + g''$ On en déduit que $f + g$ est solution de l'équation. La fonction f (resp. g) représente une O.P.P. se propageant dans le sens des x croissant (resp. décroissant).

18) On suppose le fil accroché en $x = 0$ et $x = l$, $z(0, t) = z(l, t) = 0 \forall t \rightarrow \underline{A} = -\underline{B}$ et $\sin(kl) = 0 \rightarrow k_n l = n\pi$ ($n \in \mathbb{N}^*$) Or d'après la relation de dispersion $\omega = kc \rightarrow \omega_n = \frac{n\pi c}{l}$

$\underline{z}_n(x, t) = 2\underline{B} e^{j\omega_n t} \sin(k_n x)$ On reconnaît une onde **stationnaire** pour laquelle **la propagation a disparu**.

19) $f_1 = \frac{c}{2l} \rightarrow T = 4\mu l^2 f_1^2 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ N}$ Il y a de la marge, on peut jouer des notes bien plus aigües.

20) On injecte la solution précédente dans l'équation (2) : $-\mu\omega^2 + Tk^2 + \frac{E\pi a^4}{4}k^4 = 0$

$$\rightarrow \omega = kc \sqrt{1 + \frac{E\pi a^4}{4\mu c^2} k^2} \rightarrow f_n = \frac{nc}{2l} \sqrt{1 + \frac{E\pi^3 a^4}{4Tl^2} n^2}$$

$B_{\text{fil arai.}} > B_{\text{corde}} \rightarrow$ Le son produit par le fil d'araignée est **plus aigu**.

(Pour $T = 2 \cdot 10^{-2} \text{ N}$ et $l = 0,3 \text{ m}$, l'ordre de grandeur de B est de quelques dixièmes)