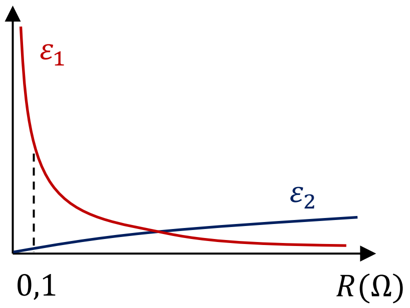
CCMP 2 2020

1) La résistance étant très faible, le calibre le mieux adapté est $\mathbf{500\ \Omega}$. Ainsi, la résolution sera la plus fine.
L'incertitude-type u vaut $\frac{3.10^{-4}+0,3}{\sqrt{3}} = \mathbf{0,2\ \Omega}$ Ce mode de mesure est **inadapté**.

[Je pense que la réponse sans la division par $\sqrt{3}$ a été acceptée]

2-4) $U_1 = (R+R_A)I_1 \ \rightarrow\ R_1 = R + R_A \ \rightarrow\ \boldsymbol{\varepsilon_1 = \frac{R_A}{R}}$ $U_2 = \frac{RR_V}{R+R_V}I_2 \ \rightarrow\ R_2 = \frac{RR_V}{R+R_V} \ \rightarrow\ \boldsymbol{\varepsilon_2 = \frac{R}{R+R_V}}$



La résistance R_V étant beaucoup plus grande que R_A ,
il apparait clairement que **la méthode 2** est la seule pertinente.

$\boldsymbol{R = 5,50.10^{-2}\ \Omega}$ $(\varepsilon_2 = 5.10^{-9})$ $u(R) = R\sqrt{\frac{u^2(U_2)}{U_2^2} + \frac{u^2(I_2)}{I_2^2}}$

Avec $u(U_2) = \frac{3.10^{-3}*0,2875 + 2.10^{-4}}{\sqrt{3}} = 6,13.10^{-4}\ \mathrm{V}$

et $u(I_2) = \frac{10^{-2}*5,23 + 3.10^{-2}}{\sqrt{3}} = 4,75.10^{-2}\ \mathrm{A}$

$\rightarrow\ \boldsymbol{u(R) = 5.10^{-4}\ \Omega}$

La précision est bien meilleure. On pourrait peut-être améliorer la qualité de la mesure avec un pont de Wheatstone [Voir exercice 3.4 du TD *Signaux physiques*]. On en déduit $\gamma = \frac{l}{SR} = \frac{10}{10^{-6}\pi R} = \boldsymbol{6.10^7\ \Omega^{-1}.m^{-1}}$

5) $\vec{f}_C + \vec{f}_D = \vec{0} \ \rightarrow\ \boldsymbol{\vec{v}_{lim} = -\frac{\tau e}{m}\vec{E}} \ \rightarrow\ \vec{j} = -ne\vec{v}_{lim} = \frac{n\tau e^2}{m}\vec{E} \ \rightarrow\ \boldsymbol{\gamma = \frac{n\tau e^2}{m}}$

6) $\vec{p}_i(t+dt) = \vec{p}_i(t) + d\vec{p}_i$ La variation de $\vec{p}_i$ pendant dt peut avoir deux origines, la force électrique (avec certitude) et une collision (avec une probabilité $\frac{dt}{\theta}$). Il en résulte que $\boldsymbol{d\vec{p}_i = \vec{f}_C dt + \frac{dt}{\theta}(\vec{p}_{i0}^{+} - \vec{p}_i)}$
Finalement, on obtient bien la relation $\vec{p}_i(t+dt) = \frac{dt}{\theta}\vec{p}_{i0}^{+} + \left(1 - \frac{dt}{\theta}\right)\vec{p}_i(t) + \vec{f}_C dt$

7) $\frac{1}{N}\sum \vec{p}_i(t+dt) = \frac{dt}{\theta N}\sum \vec{p}_{i0}^{+} + \frac{\left(1-\frac{dt}{\theta}\right)}{N}\sum \vec{p}_i(t) + \vec{f}_C dt$ (Tous les électrons subissent la même force)
Par isotropie, **la somme des $\boldsymbol{\vec{p}_{i0}^{+}}$ est nulle**. On en déduit que $\vec{p}(t+dt) = \left(1 - \frac{dt}{\theta}\right)\vec{p}(t) + \vec{f}_C dt \ \Leftrightarrow$
$\frac{\vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t)}{dt} + \frac{\vec{p}(t)}{\theta} = \vec{f}_C \ \rightarrow\ \boldsymbol{\frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{\vec{p}(t)}{\theta} = \vec{f}_C}$ Or la deuxième loi de Newton s'écrit $\boldsymbol{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f}_C - \frac{\vec{p}(t)}{\tau}}$
On peut affirmer que $\boldsymbol{\theta = \tau}$

8) L'erreur serait d'interpréter $\frac{1}{\tau}$ comme une densité de probabilité et écrire $\Pi(t) = 1 - \int_0^t \frac{dt}{\tau} = 1 - \frac{t}{\tau}$!..
Par contre, le fait qu'un électron n'ait pas subi de collision entre 0 et $t + dt$ est l'enchainement de deux évènements indépendants, celui de ne pas avoir subi de collision ni entre 0 et t ni entre t et $t + dt$:

$$\Pi(t+dt) = \Pi(t)\left(1 - \frac{dt}{\tau}\right) \ \rightarrow\ \frac{d\Pi}{dt} + \frac{\Pi}{\tau} = 0 \ \rightarrow\ \boldsymbol{\Pi(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}} \quad (0 < \Pi(t) < 1)$$

La probabilité qu'un électron ait subit un choc entre 0 et t est donc $1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$

On peut écrire cette probabilité sous la forme $\int_0^t \frac{1}{\tau}e^{-\frac{t'}{\tau}}\,dt' = \int_0^t f(t')dt'$, expressions dans lesquelles on reconnait **la densité de probabilité de collision en $\boldsymbol{t'}$ à $\boldsymbol{dt'}$ près** : $\boldsymbol{f(t') = \frac{1}{\tau}e^{-\frac{t'}{\tau}}}$ $\left(\lim_{\infty} f(t') = 0\right)$

Ainsi $\langle t' \rangle = \int_0^\infty \frac{t'}{\tau}e^{-\frac{t'}{\tau}}\,dt' = \left[-t'e^{-\frac{t'}{\tau}}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\frac{t'}{\tau}}\,dt' = \boldsymbol{\tau}$ **Durée moyenne entre deux collisions**.

9) Le flux j_q est orienté selon $\vec{u}_x$. Le nombre d'électrons traversant par unité de temps la surface unitaire avec une vitesse **positive** est $\frac{\boldsymbol{n}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{v}$. Ils véhiculent l'énergie $\boldsymbol{\mathcal{E}(T(x-v\tau))}$ et contribuent **positivement** à j_q . Le nombre d'électrons traversant par unité de temps la surface unitaire avec une vitesse **négative** est $\frac{\boldsymbol{n}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{v}$. Ils véhiculent l'énergie $\boldsymbol{\mathcal{E}(T(x+v\tau))}$ et contribuent **négativement** à .

10) En considérant $\boldsymbol{v\tau \ll x}$, $\mathcal{E}(T(x-v\tau)) - \mathcal{E}(T(x+v\tau)) \sim -\frac{d\mathcal{E}}{dT}\frac{dT}{dx}2v\tau$ Ainsi $j_q = \boldsymbol{-n\tau v^2 C_v}\frac{dT}{dx}$

11) $v^2 = \langle v_x^2 \rangle = \frac{kT}{m}$ et $C_v = \frac{k}{2} \rightarrow \boldsymbol{\lambda = \frac{n\tau T k^2}{2m}} \rightarrow \left(\frac{\lambda}{\gamma T}\right)_{\boldsymbol{dim\ 1}} = \boldsymbol{\frac{k^2}{2e^2}}$

12) A trois dimensions, il est intéressant d'imaginer que les électrons se répartissent en six catégories :
$\{v_x > 0\,; v_y = v_z = 0\}$ $\{v_x < 0\,; v_y = v_z = 0\}$ $\{v_y > 0\,; v_x = v_z = 0\}$ $\{v_y < 0\,; v_x = v_z = 0\}$ ...
On reprend donc l'expression de $j_{q,x} = \frac{1}{\mathbf{6}}nv[\mathcal{E}(T(x-v\tau)) - \mathcal{E}(T(x+v\tau))] \rightarrow j_{q,x} = -\frac{1}{\mathbf{3}}n\tau v^2 C_v \frac{dT}{dx}$
De plus, dorénavant $v^2 = \frac{3kT}{m}$ et $C_v = \frac{3k}{2} \rightarrow \left(\frac{\lambda}{\gamma T}\right)_{\boldsymbol{dim\ 3}} = \boldsymbol{\frac{3k^2}{2e^2}}$

13 & 14) $\lambda = \frac{\pi^2 n\tau k^2 T}{3m} \rightarrow \boldsymbol{\kappa = \frac{\pi^2 k^2}{3e^2} = 2,4.10^{-8}\,J^2.K^{-2}.C^{-2}}$ Alors que $\left(\frac{\lambda}{\gamma T}\right)_{dim\ 3} = \boldsymbol{1,1.10^{-8}\,J^2.K^{-2}.C^{-2}}$
L'énergie d'agitation thermique est beaucoup trop faible devant l'énergie de Fermi, les états énergétiques ne constituent pas un continuum d'énergie, **le théorème d'équipartition de l'énergie ne s'applique pas**.

15) On mesure la masse volumique d'un solide à l'aide d'une balance à fléau. La première pesée s'effectue dans l'air (m) puis on procède à **une seconde pesée avec le solide plongé dans de l'eau** (m').

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{(m-m')/\rho_{eau}} = \boldsymbol{\frac{m\rho_{eau}}{m-m'}}$$

On mesure la capacité thermique d'un solide à l'aide d'un calorimètre. De l'eau chaude en équilibre avec le solide $(m_2^{eau} + m\,, T_2)$ est ajoutée à de l'eau froide (m_1^{eau}, T_1) à l'équilibre dans le calorimètre (C).
La température finale T vérifie la relation $(m_2^{eau}c^{eau} + mc)(T - T_2) + (m_1^{eau}c^{eau} + C)(T - T_1) = 0$

$$\boldsymbol{c = \frac{(m_1^{eau}c^{eau} + C)(T - T_1)}{m(T_2 - T)} - \frac{m_2^{eau}c^{eau}}{m}}$$

16) On applique le premier principe à la tranche de surface unitaire située entre x et $x + dx$:
$\rho c dx \frac{\partial T}{\partial t} = j_q(x,t) - j_q(x+dx,t) = -\frac{\partial j_q}{\partial x}dx = \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}dx \rightarrow \boldsymbol{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\rho c}{\lambda}\frac{\partial T}{\partial t} = 0}$ $\left(D = \frac{\lambda}{\rho c}\right)$

17-20) $D\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g'(t)}{g(t)} = -Dk^2$ (Constante négative afin d'éviter une limite infinie dans le temps)

$$\boldsymbol{T(x,t) = e^{-Dk^2 t}[U\cos(kx) + W\sin(kx)]}$$

La plaque étant isolée, les conditions aux limites sont $\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right)_0 = \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right)_L = 0 \rightarrow \boldsymbol{W = 0}$ et $kL = n\pi \Leftrightarrow \boldsymbol{k_n = \frac{n\pi}{L}}$
Par linéarité de l'équation d'onde, la solution est la combinaison linéaire des modes propres :
$\boldsymbol{T(x,t) = \sum_0^\infty e^{-\frac{n^2\pi^2 Dt}{L^2}}\left[u_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]}$ Reste à exploiter la condition initiale, $T(x,0) = \sum_0^\infty u_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

Pour cela, multiplions les deux membres par $\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ $(m \in N^*)$ et intégrons entre 0 et L :

$\frac{\Gamma L}{\delta}\int_0^\delta \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = u_0\int_0^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx + \sum_{n=1}^\infty u_n \int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx \Leftrightarrow \boldsymbol{\Gamma\frac{\sin\left(\frac{m\pi\delta}{L}\right)}{\frac{m\pi\delta}{L}} = \frac{1}{2}u_m}$

$T(x,0)$ nulle en dehors de $[0\,;\delta]$ et $\sum_{n=1}^\infty u_n \int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = \frac{L}{2}u_m$ d'après le formulaire

Quant à la valeur moyenne u_0 , on la détermine en calculant $\langle T(x,0)\rangle$ entre 0 et L : $u_0 = \frac{1}{L}\int_0^{\delta} \frac{\Gamma L}{\delta} dx = \mathbf{\Gamma}$

21 & 22) $\frac{\sin\left(\frac{n\pi\delta}{L}\right)}{\frac{n\pi\delta}{L}} \sim 1$ et $\cos(n\pi) = (-1)^n$ $\quad\quad \boldsymbol{\alpha_1 t_{1/2} \sim 1,4}$

23) La moitié de la montée en température est atteinte en $t = 60\ ms$ $\rightarrow$
$t_{1/2} = 12\ ms$ $\rightarrow$ $\alpha_1 = 1{,}2.10^2\ s^{-1}$ $\rightarrow$ $D = 1{,}2.10^{-4}\ m^2.s^{-1}$ $\rightarrow$ $\boldsymbol{\lambda = 4{,}3.10^2\ W.K^{-1}.m^{-1}}$

24) Oui, cela semble compatible. En effet, $\frac{\lambda}{\gamma T} \sim \boldsymbol{2{,}4.10^{-8}\ J^2.K^{-2}.C^{-2} \sim \kappa}$ (Q 14)