CCMP 1 2016

1) On applique la 2° loi de Newton : $m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} - k(x - l_0) - mg \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}\left(x - l_0 + \frac{mg}{k}\right) = 0$

$\boldsymbol{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ **Pulsation propre** $\boldsymbol{\xi = \frac{\alpha}{2m\omega_0}}$ **Taux d'amortissement** $\boldsymbol{\tilde{x} = l_0 - \frac{g}{\omega_0^2}}$ **Position d'équilibre**

2) Si $\xi = 0$, $\boldsymbol{X(t) = X_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{V_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$ **Périodique**

Si $0 < \xi < 1$, $\boldsymbol{X(t) = e^{-\xi\omega_0 t}\left[X_0 \cos\left(\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_0 t\right) + \frac{V_0 + \xi\omega_0 X_0}{\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_0}\sin\left(\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_0 t\right)\right]}$ **Pseudopériodique**

La force du vent peut compenser la force d'amortissement si $\beta \sim \alpha$, le régime devient périodique.

3) $m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} - k(x - l_0) - mg - F_0 - F_1\cos(\omega t) \Leftrightarrow \boldsymbol{\ddot{Y} + 2\xi\omega_0\dot{Y} + \omega_0^2 Y = -\frac{F_1}{m}\cos(\omega t)}$

La fonction de transfert est $\underline{H} = \frac{-1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\xi\omega_0\omega} \Leftrightarrow \boldsymbol{\underline{H} = -\frac{1}{\omega_0^2(1-\Omega^2+2i\xi\Omega)}}$ Avec $\underline{F_1} = F_1 e^{i\omega t}$

4) Le module de $\underline{H}$ est maximal si $(1-\Omega^2)^2 + 4\xi^2\Omega^2$ est minimal. Si $\boldsymbol{\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}}$, un phénomène de résonnance apparait pour $\Omega_r = \sqrt{1-2\xi^2}$ c'est-à-dire en $\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2\xi^2} \sim \boldsymbol{\omega_0(1-\xi^2)}$ si $\xi \ll 1$.

On en déduit $\left|\underline{H}\right|(\omega_r) = \frac{1}{\omega_0^2\sqrt{4\xi^4 + 4\xi^2(1-2\xi^2)}} \sim \frac{1}{2\xi\omega_0^2}$ si $\xi \ll 1$.

5) On lit : $\omega_0(1-\xi^2) = 12{,}2\, rad.s^{-1}$ et $20\log\left(\frac{1}{2\xi}\right) = 9{,}0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\xi = 0{,}18}$ et $\boldsymbol{\omega_0 = 12{,}6\ rad.s^{-1}}$

6) On détermine les fréquences de résonnance afin de s'assurer **qu'elles ne correspondent pas** aux fréquences d'excitation possibles.

7) Un capteur **piézo-électrique** placé dans les semelles est tout à fait adapté car il convertit une force en tension électrique. On peut aussi utiliser **un accéléromètre à capacité variable** …

8) La fréquence d'échantillonnage varie de $1{,}7\ Hz$ (1) à $\boldsymbol{33\ Hz\ (4)}$**.** Ce dernier spectre est le plus pertinent, le critère de Shannon-Nyquist est bien respecté, on y voit **le fondamental à 2** $\boldsymbol{Hz}$ et les harmoniques à $4\ Hz, 6\ Hz, 8\ Hz, 10\ Hz$ et $12\ Hz$. Cela correspond à 2 pas à la seconde, c'est naturel !

9) Le fondamental de l'excitation "marche" a une pulsation voisine de $12\ rad.s^{-1}$, **cela correspond à la mise en résonnance du pont.** La mise en place de l'amortissement harmonique déplace la résonnance en $\boldsymbol{f_{r1} = 1{,}3\ Hz}$ et $\boldsymbol{f_{r2} = 2{,}4\ Hz}$: le problème n'existe plus.

10) L'unité de E et le **Pascal** $(\boldsymbol{N.m^{-2}})$

11) $\frac{\Delta L}{L} = \frac{X(x+dx,t) - X(x,t)}{dx} = \boldsymbol{\frac{\partial X}{\partial x}}$ D'où $\boldsymbol{\vec{F}(x,t) = ES\frac{\partial X}{\partial x}\vec{e}_x}$ Puis on applique la 2° loi de Newton :

$$\rho S dx \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = ES\left[\frac{\partial X}{\partial x}(x+dx,t) - \frac{\partial X}{\partial x}(x,t)\right] = ESdx\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = 0}$$

12) Le tronçon de corde est immobile suivant $\vec{e}_x$, la somme des forces horizontales est nulle :

$T(x+dx,t)\cos\alpha(x+dx,t) = T(x,t)\cos\alpha(x,t) \Rightarrow$ (A l'ordre 1 en α) $\boldsymbol{T(x+dx,t) = T(x,t) = T_0}$

13) La 2° loi de Newton sur $\vec{e}_y$ donne : $\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0[\sin\alpha(x+dx,t) - \sin\alpha(x,t)] = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$
car à l'ordre 1 en α, $\sin\alpha = \tan\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$. En définitive, $\boldsymbol{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T_0}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} =}$ $\left(\boldsymbol{c_l = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}}\right)$

14) Il s'agit d'**ondes stationnaires**, elles apparaissent lorsque **des conditions aux limites sont fixées**.

15 & 16) On obtient l'équation : $\frac{g''(t)}{g(t)} = -\frac{IE}{\rho S}\frac{f''''(x)}{f(x)} = K\ (cste)$ car x et t sont deux variables indépendantes.
L'équation en t, $g'' - Kg = 0$ ne peut pas avoir de solutions divergentes donc $K = -\omega^2 < 0$.
On en déduit que $\boldsymbol{g(t) = A'\cos(\omega t + \varphi)}$
L'équation en x, $f'''' - \frac{\rho S\omega^2}{IE} f = 0$ a pour équation caractéristique : $r^4 = \frac{\rho S \omega^2}{IE} = \beta^4 \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{r = \pm\beta} \\ \boldsymbol{r = \pm i\beta} \end{cases}$

$\boldsymbol{f(x) = A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x) + C\,\mathrm{ch}\,(\beta x) + D\,\mathrm{sh}\,(\beta x)}$ avec $\boldsymbol{\beta = \sqrt{\omega}\ \sqrt[4]{\frac{\rho S}{IE}}}$
On peut fixer $\boldsymbol{A' = 1}$, l'amplitude de $y(x,t)$ étant gérée par A, B, C et D: **5 constantes** sont nécessaires.

17) $f(0) = f''(0) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{A = C = 0}$ Puis $f(L) = f''(L) = 0 \Leftrightarrow B\sin(\beta L) = D\,\mathrm{sh}\,(\beta L) = 0$
Donc $\boldsymbol{D = 0}$ et $\boldsymbol{B \neq 0}$ (pour éviter la solution nulle !) avec $\beta L = n\pi \Leftrightarrow \boldsymbol{\omega_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{IE}{\rho S}}}$

18) Notre étude ne concerne que les ondes stationnaires **planes**, donc seuls les modes $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{e}$ et $\boldsymbol{f}$.
Les valeurs de n sont respectivement $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}$ et $\mathbf{4}$ d'après la relation $\beta L = n\pi$.

19) Pour les différentes travées, nous obtenons :

$$\omega_{n,1} = 3{,}1\, n^2\, rad.s^{-1} \qquad \omega_{n,2} = 0{,}74\, n^2\, rad.s^{-1} \qquad \omega_{n,3} = 1{,}32\, n^2\, rad.s^{-1}$$

Les modes $\boldsymbol{n = 2}$ **de la travée 1,** $\boldsymbol{n = 4}$ **de la travée 2 et** $\boldsymbol{n = 3}$ **de la travée 3** sont susceptibles d'entrer en résonnance avec la marche des piétons dont la pulsation du fondamental est voisine de 12 $rad.s^{-1}$.

Concernant les vibrations latérales, il suffit d'inverser les rôles de L et b dans les calculs :

$$\omega_{n,1} \sim \omega_{n,2} \sim \omega_{n,3} = 9{,}6.10^2\, n^2\, rad.s^{-1}$$

Aucun mode n'est susceptible d'entrer en résonnance avec le forçage par des piétons.