Banque CCINP : Ex. 63 (endomorphismes antisymétriques, endomorphismes normaux, cf. ci-dessous), Ex. 66, 68, 71, 78, (80,81, 82 déjà vus pour la semaine dernière).

Exercice 1 (Calcul d'adjoint d'un endomorphisme de rang 1)**.** Soit E un espace vectoriel euclidien et $(a,b) \in E^2$ deux vecteurs linéairement indépendants. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ défini par $\forall\, x \in E,\ u(x) = (a|x)b$.

Déterminer explicitement u^*.

Exercice 2 (Endomorphismes normaux)**.** Soit E un espace euclidien. Un élément $f \in \mathscr{L}(E)$ est dit normal si, et seulement si, il commute avec son adjoint.

a) Déterminer explicitement, par la forme de leurs matrices dans une certaine b.o.n., les endomorphismes normaux de E si $\dim E = 2$.

Dans ce qui suit, on ne suppose plus que E est de dim. 2.

b) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ normal et F est un s.e.v. de E stable par f alors F est aussi stable par f^*, autrement dit que $F^\perp$ est stable par f.

Indication – On pourra raisonner matriciellement.

c) Déduire des deux résultats précédents un théorème de réduction des endomorphismes normaux généralisant celui vu pour les isométries vectorielles.

d) Une autre caractérisation des endomorphismes normaux :

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que f est normal ssi pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \|f^*(x)\|$.

Retrouver le fait (donné aussi par le théorème complet du c)) que si f est normal alors $\ker(f) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(f) = E$.

Exercice 3 (Hyperplan médiateur)**.** Montrer que si x et y sont deux vecteurs distincts et de même norme d'un espace euclidien E, il existe un unique hyperplan H de E tel que $y = s_H(x)$ où s_H désigne la symétrie orthogonale par rapport à H.

Exercice 4. Soient E un espace euclidien, $f \in O(E)$ et F un s.e.v. de E. Montrer que $f(F^\perp) = f(F)^\perp$.

Exercice 5. Soit E euclidien. On dit que $f \in \mathcal{L}(E)$ est une *similitude* si, et seulement si, $f = \lambda g$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $g \in O(E)$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ montrer que f préserve l'orthogonalité i.e. $\forall\,(x,y) \in E^2,\ (x|y) = 0 \Rightarrow (f(x)|f(y)) = 0$ si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $g \in O(E)$ tels que $f = \lambda g$.

Exercice 6. Soit $(E, |)$ un espace euclidien et $x \in E$.

Montrer l'équivalence entre les deux propriétés suivantes :

(i) il existe une b.o.n. $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $x = e_1 + \cdots + e_n$.

(ii) $\|x\| = \sqrt{n}$.

Indication pour le sens indirect : on pourra commencer par le cas $n = 2$ et penser en terme de rotation.

Exercice 7 (Grand classique, incontournable des concours divers)**.** Soit $A = (a_{i,j}) \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que

a) $n \overset{(1)}{\leq} \sum_{i,j} |a_{i,j}| \overset{(2)}{\leq} n\sqrt{n}$,

b) $|\sum_{i,j} a_{i,j}| \leq n$.

c) Trouver une matrice dans $O_2(\mathbb{R})$ puis une matrice dans $O_4(\mathbb{R})$ pour lesquelles il y a égalité dans (2).

d) Montrer que si n est impair et $n \geq 3$, l'inégalité (2) est toujours stricte.

Exercice 8. Déterminer le commutant de $SO(2,\mathbb{R})$ dans $M_2(\mathbb{R})$ i.e. $\mathcal{C} = \{A \in M_2(\mathbb{R}), \forall\, M \in SO(2,\mathbb{R}),\ AM = MA\}$

Exercice 9. Soit E un espace euclidien de dimension n et $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$. On note $S = \{u \in \mathcal{L}((E),\ \forall\, i \in [\![1,p]\!],\ (u + u^*)(x_i) = 0\}$.

Déterminer $\dim(S)$.

Exercice 10 (Isométries partielles)**.** Une isométrie partielle u d'un e.v. euclidien E est un endomorphisme de E qui est une isométrie sur $(\ker u)^\perp$ i.e. telle que pour tout $y \in (\ker u)^\perp$, $\|uy\| = \|y\|$.

a) Si u est une isométrie partielle, montrer que $(\ker u)^\perp = \{x \in E,\ \|ux\| = \|x\|\}$.

b) Montrer que u est une isométrie partielle si, et seulement si, u^*u est le projecteur orthogonal sur un s.e.v. F. Montrer que $F = (\ker u)^\perp$.

Exercice 11 (Une démonstration « hermitienne » (i.e. avec le p.s. complexe) du fait que les matrices sym. réelles ont toutes leurs v.p. réelles)**.**

a) Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ une matrice réelle symétrique.
(i) Montrer que pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$, ${}^t\overline{X}.A.X \in \mathbb{R}$.
(ii) En déduire que toutes les valeurs propres de A dans $\mathbb{C}$ sont en fait réelles.

b) En adaptant le raisonnement précédent, que dire des v.p. complexes des matrices antisymétriques réelles ?

Exercice 12. Donner un exemple d'une matrice $A \in M_2(\mathbb{C})$ symétrique et non diagonalisable.

Exercice 13 (CCINP MP 2021 : endomorphismes antisymétriques)**.** Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E vérifiant :

$$\forall x \in E, \langle u(x), x\rangle = 0$$

a) Montrer que la matrice de u dans une base orthonormale de E est antisymétrique.

b) Montrer que $(\operatorname{Ker} u)^\perp$ est stable par u.

c) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$$

avec N inversible.

d) Montrer que le rang de u est pair.

Exercice 14 (Les matrices symétriques positives et leurs racines carrées)**.**

a) **Existence :** Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

b) **(M1) pour l'unicité :**
(i) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dim. finie et f et g dans $\mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes diagonalisables. On suppose qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(f) = P(g)$ et P est injectif sur $\operatorname{Sp}(f) \cup \operatorname{Sp}(g)$. Montrer que $f = g$.
Indication – On pourra comparer les s.e.v. propres de $P(f)$ et de f.
(ii) Déduire de ce qui précède que toute matrice $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ admet une unique racine carrée $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (et si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ alors $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$).

c) **(M2) pour l'unicité**
(i) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et B une matrice diagonalisable à v.p. *positives* telle que $B^2 = A$.
Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $B = Q(A)$.
(ii) En déduire que si B_1 et B_2 sont matrices diagonalisables à v.p. *positives* telles que $B_1^2 = B_2^2 = A$ alors B_1 et B_2 commutent.
(iii) Montrer que deux endomorphismes dz qui commutent sont simultanément diagonalisables (i.e. dans la même base).
(iv) Conclure pour l'unicité de la racine carrée symétrique positive d'une matrice symétrique positive.

Exercice 15 (Décomposition polaire)**.** Montrer que tout $M \in GL_n(\mathbb{R})$ se décompose de manière unique sous la forme $M = OS$ avec O orthogonale et S symétrique définie positive.

Exercice 16. Soit $(E, (\ |\ )$ euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme symétrique.

On note $\|u\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$ la norme d'opérateur de u (subordonnée au choix de la norme euclidienne dans E) et $\rho(u) = \max_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} |\lambda|$ le rayon spectral de u. Montrer que : $\|u\| \overset{(1)}{=} \rho(u) \overset{(2)}{=} \max_{\|x\|=1} |(u(x)|x)|$.

Exercice 17. 1) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $|\det(A)|^{2/n} \leq \dfrac{1}{n}\|A\|^2$ (où $\|A\|$ est la norme euclidienne canonique).

2) Montrer que $A \in M_n(\mathbb{R})$ est symétrique positive si, et seulement, il existe $q \leq n$ vecteurs colonnes $V_1, \dots, V_q$ tels que $A = V_1 V_1^\top + \dots + V_q V_q^\top$.

Exercice 18. Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ et $E = \{OSO^{-1}, O \in O_n(\mathbb{R})\}$ ("l'orbite de S pour la conjugaison par $O_n(\mathbb{R})$).

a) Soit $A \in E$. Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,i} \in [\lambda_1, \lambda_n]$.

b) Soit $g : [\lambda_1, \lambda_n] \to \mathbb{R}$ convexe. Montrer que :

$$\max\{\sum_{i=1}^n g(a_{i,i},),\ A \in E\} = \sum_{k=1}^n g(\lambda_k).$$