Banque CCINP : ex. 112, 109, 107, 105, 104, 101, 100 q1) et 2), 98, 95.

Exercice 1. Démontrer la sous-additivité des proba. énoncée en cours :

(i)Version séquentielle : soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque d'événements, alors :

$$\mathbb{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) \leq +\infty$$

Indication – On pourra commencer par les unions finies.

(ii) Version famille : soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille dénombrable quelconque d'événements alors :

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i\in I} A_i) \leq \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i) \leq +\infty$$

Exercice 2. Soit on considère l'espace probabilisable $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. La fonction $P\ :\ \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,1]$, $A \mapsto \lim\limits_{N\to+\infty} \dfrac{\mathrm{Card}(A\cap [\![0,N]\!])}{N+1}$ est-elle une probabilité sur cet espace ?

Exercice 3. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements dans un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.

a) Montrer que $B := \{\omega \in \Omega,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \omega \in \bigcap_{n\geq n_0} A_n\}$ est un événement i.e. que $B \in \mathcal{A}$.

On dira que B est l'événement « A_n est réalisé A.P.C.R »

b) Montrer que $C := \{\omega \in \Omega,\ \omega$ n'appartient qu'à un nombre *fini* d'événements $A_n\}$ est encore un événement i.e. $C \in \mathcal{A}$.

c) En déduire que l'événement $D := \{\omega \in \Omega,\ \omega$ appartient à un nombre *infini* d'événements $A_n\}$ est un événement. On dit que D est l'événement « A_n est réalisé infiniment souvent ».

Exercice 4 (Tribu engendrée)**.**

a) Justifier que si $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ est une famille des tribus sur un ensemble Ω alors $\bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i$ est encore une tribu de Ω.

b) En déduire que pour toute partie $\mathcal{M}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ il existe une plus petite tribu de Ω contenant $\mathcal{M}$. On l'appelle par la suite la tribu engendrée par $\mathcal{M}$ et on la note $\sigma(M)$.

Exercice 5 (Une excursion dans le monde continu.. pas si différent du tirage à pile ou face..)**.** **Question :** Quelle est la probabilité qu'un nombre pris au hasard dans $]0,1[$ ait dans son développement décimal le chiffre 7 ?

Cadre mathématique précis : Intuitivement, on peut dire que la probabilité de choisir un nombre dans un intervalle de $]0,1[$ est proportionnelle à la longueur de cet intervalle et comme la probabilité de $]0,1[$ doit être égale à 1 , on est amené à poser que la probabilité d'un intervalle de $]0,1[$ est donnée par sa longueur. Prenons donc comme modèle mathématique l'espace probabilisé suivant :

- $\triangleright\ \Omega =]0,1[$,
- $\triangleright\ \mathcal{A}$ = la tribu engendrée par tous les intervalles de $]0,1[$, tribu des boreliéns
- $\triangleright\ P$ une proba telle que si I est un intervalle alors $P(I)$ = longueur de I.

On admet ici qu'une telle tribu et une telle mesure existent (c'est ce que l'on appelle la mesure de Lebesgue sur la tribu des boréliens de l'intervalle $]0,1[$). Répondre alors à la question posée.

Indication – On pourra voir l'événement considéré E comme une union disjointe $E = \coprod_{i=1}^{+\infty} A_i$ où A_i est l'événement : « le chiffre 7 apparaît pour la première fois à la i-ième décimale » (on justifiera que les A_i sont bien des événements, dont on calculera la proba.).

Exercice 6 (Premier lemme de Borel Cantelli)**.** a) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que la série $\sum P(A_n)$ converge. Montrer que l'événement « être dans A_n infiniment souvent » défini plus haut est de probabilité nulle. b) Soit une urne contenant au départ deux boules, une rouge et une noire. On effectue une suite de tirages et à chaque tirage on rajoute une boule rouge dans l'urne. Au n-ème tirage l'urne contient n boules rouges et une boule noire.

Montrer que presque sûrement, on ne verra la boule noire sortir deux fois de suite qu'un nombre fini de fois. En revanche l'exercice suivant va prouver qu'on verra presque sûrement la boule noire sortir une infinité de fois.

Exercice 7 (Lemme de la série divergente, prélude à Borel-Cantelli 2)**.** a) Montrer que si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille d'événements indépendants tous de même probabilité $p > 0$ alors :

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = 1$$

b) Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements indépendants tels que $\sum \mathbb{P}(A_i)$ soit divergente.

Montrer qu'on a encore $\mathbb{P}(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = 1$

Indication – Avec la même remarque qu'au a), on veut étudier la limite d'un produit.... on a une hypothèse sur une somme....

Révision de première année

Exercice 8. Un système parallèle constitué de n composants indépendants fonctionne si et seulement si l'un au moins des composants fonctionne. La probabilité de fonctionnement du $k^{\text{ème}}$ composant est notée p_k. Quelle est la probabilité de fonctionnement du système ?

Exercice 9. a) Soient A, B, C trois événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Montrer que

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) \geqslant 1 - \mathbb{P}(A^c) - \mathbb{P}(B^c) - \mathbb{P}(C^c).$$

b) Soient $\alpha \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ et A, B, C, D quatre événements deux à deux incompatibles tels que

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(D) = \alpha \quad \text{ et } \quad \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2} - \alpha$$

Les événements $A \cup B$ et $A \cup D$ sont-ils indépendants ? Même question pour les événements $A \cup B$ et $A \cup C$? Dans le cas d'une réponse positive aux deux questions précédentes, sont-ils mutuellement indépendants ?

Exercice 10. Trois chasseurs numérotés de 1 à 3 sont d'adresses différentes : le premier touche le gibier 7 fois sur 10, le second 5 sur 10, le troisième 1 fois sur dix.

Les trois chasseurs tirent simultanément sur un lapin (pauvre lapin).

Déterminer les probabilités des événements suivants :

a) Le lapin est touché.

b) Le lapin est touché mais le chasseur 3 l'a raté.

c) Le chasseur 3 est le seui à avoir touché le lapin.

d) Le lapin est touché sachant que le chasseur 3 l'a raté

Exercice 11. On tire 3 boules au hasard et simultanément d'une urne qui en contient $n (n \geqslant 3)$. Les boules étant numérotées de 1 à n, caluler, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$ la probabilité de A_k : «le plus petit numéro tiré est k » et B_k : «le plus grand numéro tiré est k.»

Exercice 12 (Calcul de la fonction φ en arithmétique : la connaissance de cette fonction est au programme, cf chap A3)**.** Soit un entier $n \geqslant 2$. On considère l'espace probabilisé $\Omega = \{1, \ldots, n\}$ muni de la tribu totale et de l'équiprobabilité.

a) Pour tout q diviseur de n ; on note A_q l'ensemble des multiples de q contenus dans Ω. Calculer $\mathbb{P}(A_q)$.

b) Soient $p_1, p_2, \ldots, p_k$ les diviseurs premiers (distincts) de n. Montrer que les événements $A_{p_1}, A_{p_2}, \ldots, A_{p_k}$ sont mutuellement indépendants.

c) Soit B_n l'ensemble des entiers i premiers avec n compris entre 1 et n. Montrer que

$$|B_n| = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

Exercice 13 (Urne de Polya)**.** Pour étudier l'évolution d'une épidémie, Polya a introduit le modèle suivant où $(b, r, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$. Dans une urne contenant b boules bleues et r boules rouges, on effectue un tirage puis on remet la boule tirée avec c boules de la même couleur. On répète l'opération. En notant A_n l'événement : « le n-ième tirage amène une boule bleue », calculer $P(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 14. Un homme a l'habitude d'oublier sa clef chez lui, avec une probabilité p.

Il a cinq poches et quand il prend sa clef, il la met au hasard dans une de ses cinq poches.

Aujourd'hui, comme d'habitude, il cherche sa clef et vient de fouiller quatre poches en vain. Quelle est la probabilité qu'elle soit dans la dernière poche ?

Exercice 15. Une boîte contient N boules de k couleurs : N_1 de couleur c_1, N_2 de couleur c_2, …, N_k de couleurs c_k. (On a donc $N_1 + \cdots + N_k = N$).

On tire n boules et on cherche la probabilité d'obtenir exactement n_1 boules de couleurs c_1, …, n_k boules de couleur c_k (avec donc $n_1 + \cdots + n_k = n$).

a) Dans le cas de tirages successifs sans remise.

b) Dans le cas de tirages successifs avec remise.