**Banque CCINP :** Ex. 37, 38, 39, 40.

**Exercice 1.** a) Rappeler les trois axiomes définissant une norme.

b) Montrer que si $N$ est une norme, et $B$ une boule pour $N$ alors $B$ est convexe.

c) Montrer réciproquement que si $N$ est une application vérifiant les deux premiers axiomes des normes (i.e. tout sauf l'inégalité triangulaire) et telle que l'ensemble $B = \{x \in E,\ N(x) \leq 1\}$ est convexe, alors $N$ est une norme.

*Indication* – On pourra utiliser un barycentre convenable des points $x/N(x)$ et $y/N(y)$.

**Exercice 2** (Applications aux normes $N_p$)**.** Déduire de l'exercice précédent que si $p \in [1, +\infty[$, la fonction $N_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ définie, pour $x = (x_1, \ldots, x_n)$ par $N_p(x) = (\sum_{k=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$ est une norme.

**Exercice 3** (Mines Telecom 2022)**.** On note $E = \mathbf{R}[X]$. Pour $n \in \mathbf{N}$ et $P \in E$, on note

$$\theta_n(P) = \int_0^1 P(t)t^n dt.$$

a) Montrer que, pour tout $P \in E, N(P) = \sup_{n \in \mathbf{N}} |\theta_n(P)|$ est bien défini.

b) Montrer que $N$ est une norme sur $E$.

**Exercice 4.** Soit $(E, \|\ \|)$ un e.v.n. On dit que la boule unité $B$ est *strictement convexe* ssi $\forall\ (x, y \in B^2, \forall\ t \in ]0, 1[,\ x \neq y \Rightarrow \|(1-t)x + ty\| < 1$.

Montrer que si $\|\ \|$ est une norme euclidienne, alors $B$ est strictement convexe.

**Exercice 5.** On considère $E = \mathbb{R}^2$ et pour chaque $a \in \mathbb{R}$, et chaque $u = (x, y) \in E$, on note $q_a(u) = x^2 + 2axy + y^2$.

Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ peut-on définir une norme sur $\mathbb{R}^2$ en posant $\|u\|_a = \sqrt{q_a(u)}$ ?

**Exercice 6** (Centrale 2 MP 2022)**.** Soient $a_0 < \cdots < a_n$ des entiers distincts. On note $A = (a_0, \ldots, a_n)$.

Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on note $\|P\|_A = \max_{0 \leqslant k \leqslant n} |P(a_k)|$.

a) Montrer que $\|\cdot\|_A$ définit une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$.

b) La norme $\|\ \|_A$ est-elle issue d'un produit scalaire ?

**Exercice 7.** Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}),\ f(0) = 0\}$.

a) On pose $N(f) = \|f + f'\|_\infty$. Montrer que $N$ définit une norme sur $E$.

b) On pose $N'(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Montrer que $N'$ est une norme équivalente à $N$.

*Indication pour le b)* Revoir le cours sur les E.D.

**Exercice 8.** Pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$ on note $\|A\|_\infty = \sup_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|$ et $\|A\| = n\|A\|_\infty$.

Montrer que pour tout $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, $\|A.B\| \leq \|A\|.\|B\|$.

**Exercice 9.** Pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$, on pose $N(A) = \max\limits_{i \in [\![1,n]\!]} (\sum\limits_{j=1}^n |a_{i,j}|)$.

a) Montrer que $N$ définit une norme sur $M_n(\mathbb{K})$.

b) Montrer que $N$ est multiplicative i.e. $\forall\ (A, B)\ \in M_n(\mathbb{K})^2,\ N(AB) \leq N(A).N(B)$.

**Exercice 10.** Soit $(E, \|\ \|)$ un e.v.n.

a) Soit $A \subset E$ un ensemble convexe. Montrer que l'application $f = d_A : E \to \mathbb{R}^+$, $x \in E \mapsto d(x, A)$ est une fonction convexe i.e. $\forall\ (x, y) \in E^2,\ \forall\ t\ \in [0, 1],\ f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$.

b) soit $F$ un s.e.v. de $E$. Montrer que $d_F$ est une *semi-norme* c'est-à-dire qu'elle vérifie tous les axiomes des normes sauf la propriété $d_F(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

**Un résultat culturellement incontournable...**

**Exercice 11** (Des parties denses importantes : des sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$)**.** a) Rappeler, avec démonstration, la forme de tous les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ (théorème du cours du chap. A2)).

b) Soit $H$ un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ différent des deux sous-groupes triviaux $\{0\}$ et $\mathbb{R}$.

Soit $\alpha = \inf(H \cap \mathbb{R}^{+*})$.

Montrer que si $\alpha > 0$ alors $\alpha \in H$ puis que $H = \alpha\mathbb{Z}$.

c) Montrer que si $\alpha = 0$ alors $H$ est dense dans $\mathbb{R}$.

On vient de démontrer le :

**Théorème de classification des sous-groupes de** $(\mathbb{R}, +)$ (H.P. mais à connaître au niveau Mines-Centrale) :

$$\boxed{\text{tout sous-groupe de } (\mathbb{R}, +) \text{ est soit de la forme } \alpha\mathbb{Z} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}, \text{ soit dense dans } \mathbb{R}.}$$