**Exercice 1.** Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$. Donner une C.N.S. sur $\mathrm{Tr}(A)$ et $\det(A)$ pour que $A$ soit tz dans $M_2(\mathbb{R})$.

**Exercice 2.** Soit $E = \mathbb{R}^{2n+1}$ et $(e_1, \dots, e_{2n+1})$ sa base canonique. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par $\begin{cases} \forall\, i \neq n+1, \quad u(e_i) = e_1, \\ u(e_{n+1}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{2n+1} e_i. \end{cases}$.

L'endomorphisme $u$ est-il diagonalisable ? Trigonalisable ?

## Trigonalisation précisée pour les matrices $3 \times 3$ (Jordan)

**Exercice 3.** Soit $E$ un $K$-e.v. de dim. 3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ non diagonalisable, mais trigonalisable.

a) Combien $u$ peut-il avoir de valeurs propres ?

b) On se place dans le cas où $u$ a deux valeurs propres $\alpha$ et $\beta$ avec $\chi_u = (X-\alpha)(X-\beta)^2$.

Démontrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $E$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$.

c) On suppose désormais que $u$ admet une unique valeur propre, qu'on note $\lambda$ et que $u \neq \lambda\,\mathrm{id}$.

(i) Que dire de $(u - \lambda\,\mathrm{id})^3$ ? En fait les deux questions qui suivent sont basées sur la réduction de $v = u - \lambda\,\mathrm{id}$

(ii) Si $(u-\lambda\,\mathrm{id})^2 \neq 0$, montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $E$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

(iii) Si $(u-\lambda\,\mathrm{id})^2 = 0$ montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $E$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

**Exercice 4.**

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Expliciter des matrices $T \in TS_3(\mathbb{R})$ et $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PTP^{-1}$.

## Application de la trigonalisation

**Exercice 5** (Grand classique... résultat à connaître absolument)**.** Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ vérifie $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A^2) = \cdots = \mathrm{Tr}(A^n) = 0$ alors $A$ est nilpotente.

**Exercice 6.** Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $k.M$ est semblable à $M$. Montrer que $M$ est nilpotente.

**Exercice 7** (Mines-Ponts 2023, Yohan : un peu calculatoire sur le polynôme donné !)**.** Peut-on trouver $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant les trois conditions :

(C1) $A^5 - 2A^4 - 2A^3 + A^2 + 4A + 4I = 0$,

(C2) $\mathrm{Tr}(A^3) = 0$,

(C3) $\det(A) = \pm 1$ ?

**Exercice 8** (CCINP MP 2022, la remarque sur $\mathrm{Tr}(A^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k$ s'applique bien sûr aussi dans le cas dz)**.** Soit $n \geqslant 2$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice avec des 1 sur la diagonale, sur la première colonne et sur la première ligne, puis des 0 partout ailleurs. Comme $A$ est une matrice symétrique réelle, on sait que (théorème du chap. R4) $A$ est dz dans $M_n(\mathbb{R})$.

Déterminer les valeurs propres de $A$ en commençant par le cas $n = 2$.

## Racines de matrices en tout genre

**Exercice 9.** a) Montrer que si $N$ est nilpotente dans $M_n(\mathbb{C})$ et $M = I + N$ alors $R = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{1/2}{k} N^k$ vérifie $R^2 = M$.

b) En déduire que pour toute matrice inversible $A \in GL_n(\mathbb{C})$, il existe une matrice $B \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $B^2 = A$.

c) Soit $T \in M_n(K)$ telle que pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$ $T(i, i+1) = 1$ et $T(i,j) = 0$ sinon. Montrer qu'il n'existe pas de matrice $R$ telle que $R^2 = T$.

**Exercice 10.** Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ diagonalisable ayant toutes ses valeurs propres strictement positives. Montrer que $A$ admet une unique racine carrée $R$ diagonalisable à valeurs propres positives.

Généralisation pour l'unicité : si $M$ et $N$ sont deux matrices dz dans $M_n(K)$ vérifiant $P(M) = P(N)$ avec $P \in K[X]$ qui est *injectif* sur $\mathrm{Sp}(M) \cup \mathrm{Sp}(N)$ alors $M = N$.