Diagonalisation/ v.p avec le polynôme caractéristique

Banque CCINP : Ex. 59, Ex. 65, Ex. 67, Ex. 69, Ex. 70.

Exercice 1 (Révisions du R1 : exercice de base, on rajoute juste le mot polynôme caractéristique)**.**
Soit $A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & -6 \\ -2 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & -4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q})$.

a) Calculer le polynôme caractéristique de A et les v.p. de A.

b) (i) Déterminer la dimension des s.e.v. propres de A. (ii) En déduire que A est dz.

(iii) Déterminer, mieux, une base de vecteurs propres de A et en déduire une matrice P telle que $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale.

c) En déduire le polynôme minimal de A.

d) En déduire une formule donnant A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$ comme combinaison linéaire de A et I.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M = (m_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ définie par $m_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } (i,j) = (1,n) \text{ ou } i \geq j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

a) Calculer le polynôme caractéristique de M.

b) Montrer que M possède une unique valeur propre dans $[1, +\infty[$, que l'on notera λ_n.

Exercice 3. Pour tout réel $x \in [-1; 1]$, on note φ_x l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice respectivement à la base canonique est

$$A_x = \begin{pmatrix} x^2 & x\sqrt{1-x^2} & \sqrt{1-x^2} \\ x\sqrt{1-x^2} & 1-x^2 & -x \\ \sqrt{1-x^2} & -x & 0 \end{pmatrix}$$

(a). Calculer la trace et le déterminant de la matrice A_x.

(b). Montrer pour tout $x \in [-1; 1], 1$ est une valeur propre de A_x.

(c). Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A_x.

Exercice 4 (Matrices circulantes)**.** Soient $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$.

On considère $M = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$ appelée matrice circulante.

a) Expliciter une matrice J telle que $M = a_0 I + a_1 J + \dots + a_{n-1} J^{n-1}$.

b) Diagonaliser J.

c) Montrer que M est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

d) En déduire une expression du déterminant de M sous forme factorisée à l'aide des racines n-ième de l'unité dans $\mathbb{C}$.

Propriétés du polynôme caractéristique

Exercice 5 (Le polynôme caractéristique est-il un « invariant complet » de similitude ?)**.**

a) Montrer que deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

b) La réciproque est-elle vraie ?

c) Montrer que si $\chi_A = \chi_B$ est un polynôme simplement scindé, alors A et B sont semblables.

Exercice 6 (On continue la recherche d'un « invariant complet » de similitude... dans $M_2(\mathbb{C})$)**.**

a) Montrer que dans $M_2(\mathbb{C})$ deux matrices ayant le même polynôme minimal et le même polynôme caractéristique sont semblables.

Indication : On distinguera deux cas pour le polynôme caractéristique.

b) Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $\mu_A, \mu_B, \chi_A, \chi_B$. Les matrices A et B sont-elles semblables ?

Exercice 7 (Classique mais astucieux)**.** Soit $(A, B) \in M_n(\mathbb{R})^2$ qui sont *semblables dans* $M_n(\mathbb{C})$ i.e. telles qu'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $B = PAP^{-1}$. Montrer que A et B sont semblables dans $M_n(\mathbb{R})$.

Indication : On écrira $P = P_1 + iP_2$ avec P_1, P_2 dans $M_n(\mathbb{R})$, et on cherchera un $x \in \mathbb{R}$ tel que $P_1 + xP_2$ soit inversible.

Exercice 8. a) Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ ayant n valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ distinctes.
Que dire des v.p. de A^{-1} puis de de $Com(A)$.
b) En déduire que pour toute matrice A comme au a), $\mathrm{Tr}(Com(A))$ apparaît, au signe près, comme un certain coefficient du polynôme χ_A.
c) Pour les 5/2, étendre le b), par densité, à toutes les matrices $A \in M_n(\mathbb{C})$.

Exercice 9 (Le polynôme caractéristique « voit la dimension »)**.** Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. et $u \in \mathcal{L}(E)$ ayant un polynôme annulateur $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$ de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.
Montrer que $\dim(E)$ est paire.

Exercice 10. Montrer qu'une matrice $A \in M_2(\mathbb{K})$ est nilpotente si $\mathrm{Tr}(A) = \det(A) = 0$.

Exercice 11. Le but de cet exercice est de montrer que toute matrice $M \in M_n(\mathbb{K})$ de rang $r < n$ admet un polynôme annulateur de degré $r + 1$.
a) Soit donc $M \in M_n(\mathbb{K})$ de rang $r < n$. Montrer que M est semblable à une matrice N de la forme $N = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}$ où $A \in M_r(\mathbb{K})$ et $C \in M_{n-r,r}(K)$.
b) Conclure

En sens inverse, obtention du polynôme caractéristique avec d'autres informations

Exercice 12. Soit $A \in M_6(\mathbb{R})$ inversible telle que $A^5 - 3A^4 + 2A^3 = 0$ et $\mathrm{Tr}(A) = 8$.
Calculer le polynôme caractéristique χ_A de A.

Diagonalisation simultanée

Exercice 13 (Un grand classique qu'il est bon de connaître pour d'autres exercices)**.** Soit E un K-e.v. de dim. finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes diagonalisables qui commutent : $f \circ g = g \circ f$.
Montrer que f et g sont simultanément diagonalisables, i.e. qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ soient diagonales..

Sous-espaces stables

Exercice 14. Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ -4 & -1 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}$. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé.
a) Déterminer valeurs propres et s.e.v. propres de u. Est-il diagonalisable ?
b) Déterminer le polynôme minimal de u.
c) Déterminer $\ker(u - 5\,\mathrm{id})^2$.
d) Déterminer tous les s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ stables par u.