Banque CCINP : Ex. 62 en entier, Ex. 65 1,2, Ex. 71.

Réduction par équivalence, et équivalence-à-droite ou à gauche

Exercice 1. Soit $A \in M_{n,p}(K)$.
a) On suppose $\mathrm{rg}(A) = n$, montrer qu'il existe $B \in M_{p,n}(K)$ telle que $AB = I_n$.
b) On suppose $\mathrm{rg}(A) = p$, montrer qu'il existe $C \in M_{p,n}(K)$ telle que $CA = I_p$.

Exercice 2. Soit A une matrice carrée non inversible. Montrer qu'il existe toujours une matrice M inversible telle que MA soit nilpotente.

Exercice 3. Soit $A \in M_n(K)$ avec $n \geq 2$ telle que $\forall\, X \in M_n(K)$, $\det(A+X) = \det(A) + \det(X)$.
Montrer que $A = 0$.

Matrices semblables

Exercice 4. Si A et B dans $M_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$ vérifient $B = PAP^{-1}$ alors comparer $\ker(A)$ et $\ker(B)$ et $\mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Im}(B)$.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et m tel que $2m \leq n$.
Montrer que les deux matrices carrées de tailles n suivantes sont semblables : (écriture par bloc)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -I_m & 0 \\ I_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} K_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & K_m & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ où } \forall\, i \in [\![1, m]\!],\ K_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. a) Soit $A \in M_n(K)$ une matrice semblable à une matrice $B \in M_n(K)$ dont la première ligne et la première colonne sont nulles. Montrer que $Ker A \not\subset \mathrm{Im}\, A$.
b) Montrer réciproquement que si $Ker A \not\subset \mathrm{Im}\, A$ alors A est semblable à une matrice dont la première ligne et la première colonne sont nulles.
c) Montrer que la condition $Ker A \not\subset \mathrm{Im}\, A$ est équivalente à $\dim Ker(A^2) < 2 \dim Ker A$.

Exercice 7 (Classes de similitude des matrices de rang 1)**.** a) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathrm{rg}(A) = 1 \Leftrightarrow$
$$\begin{cases} A \text{ est semblable à } E_{2,1} \\ \text{ou } \exists\, \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \text{ tel que } A \text{ est semblable à } \lambda E_{1,1}. \end{cases}$$
b) Montrer que deux matrices de rang 1 sont semblables si, et seulement si, elles ont même trace.
c) Une jolie application : une façon « conceptuelle » de calculer $\det(A)$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
en voyant cette matrice A comme $E - I$ où E est la matrice dont toutes les entrées valent 1.
(i) Trouver une matrice diagonale très simple à laquelle E est semblable.
(ii) En déduire sans calcul supplémentaire, la valeur de $\det(A)$.

Exercice 8. Soit K un corps et $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$. Pour quels $(a, b, c) \in K^3$ cette matrice est-elle diagonalisable ?

Diagonalisations concrètes (équation aux valeurs propres)

Exercice 9. Soient $a_1, \dots, a_{n-1}, b_1, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{R}$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_{n-1} \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$.
Déterminer une C.N.S. sur $a_1, \dots, a_{n-1}, b_1, \dots, b_{n-1}$ pour que M soit diagonalisable.

Exercice 10. Soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ canoniquement associé à A. On suppose que n est un nombre *pair*.
a) Montrer que $E = \mathbb{C}^n$ peut s'écrire comme somme directe de plans stables par f.
b) En déduire une C.N.S. sur $(a_1, \dots, a_n)$ pour que A soit diagonalisable.

L'apport du polynôme minimal

Exercice 11. Soient $(a,b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ et $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$.

a) En écrivant $M(a,b)$ à l'aide de la matrice I et de la matrice E dont toutes les entrées valent 1, calculer le polynôme minimal de la matrice $M(a,b)$

b) La matrice $M(a,b)$ est-elle dz ? Si oui la diagonaliser.

Exercice 12. a) Quel est le polynôme minimal d'une matrice nilpotente d'indice r ?

b) Si $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec A et B matrices carrées, déterminer une relation entre μ_M et les polynômes μ_A et μ_B.

c) Soient $(a,b,c) \in K^3$ et $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}$. Déterminer le polynôme minimal de M.

Propriétés sympa des matrices diagonales

Exercice 13. Soit $A \in M_n(K)$ une matrice diagonale de la forme $A = \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n)$ avec $a_1, \dots, a_n$ deux à deux distincts. Montrer que l'algèbre $K[A]$ coïncide avec l'algèbre $\mathcal{D}_n$ formée par toutes les matrices diagonales.

Exercice 14. a) Reprendre le résultat de l'ex. 14 pl. A1 et redémontrez le par un argument géométrique.

b) Décrire plus généralement l'e.v. des matrices qui commutent à une matrice diagonale $D \in D_n(K)$ où la valeurs λ_1 est répétée r_1 fois sur la diagonale, λ_2 répétée r_2 fois, jusqu'à λ_s répétée r_s fois (avec $r_1 + \cdots + r_s = n$). On déterminera sa dimension en fonctions de $r_1, \dots, r_s$.

c) En déduire le même résultat pour les matrices/endomorphismes diagonalisables.

L'apport des polynômes annulateurs pour la diagonalisabilité ou d'autres renseignements...

Exercice 15. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, et $f, u, v \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $f = au + bv$, $f^2 = a^2u + b^2v$, $f^3 = a^3u + b^3v$.

On suppose a et b distincts et différents de 0.

a) Montrer que f est diagonalisable.

b) Montrer que u et v sont simultanément diagonalisables.

Exercice 16 (Résultat explicitement dans le programme de MP : peut donc s'utiliser comme résultat de cours)**.** Soit E un K-e.v. de dim. finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. Soit $F \subset E$ un s.e.v. de E stable par f. Montrer que $g = f_{|F}$ est encore diagonalisable.

Exercice 17. Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $A^4 = A^2$ et $\{-1, 1\} \subset \mathrm{Sp}(A)$.

Montrer que A est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$.

Exercice 18. Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. de dim. finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u = 0$. Montrer que $\mathrm{rg}(u)$ est pair.

Exercice 19. Soit $M \in M_n(K)$ qui s'écrit par blocs $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec A et B deux matrices carrées.

Montrer que M est diagonalisable si, et seulement si, A et B sont diagonalisables.