Banque CCINP : 65 1) et 2), 84 85,86,87, 89, 90

Autour de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:

Exercice 1. A quelle condition nécessaire et suffisante sur l'entier n, l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,\times)$ admet-il des éléments nilpotents non nuls ? Préciser alors la forme de ces éléments nilpotents.

Exercice 2 (Thm. de Wilson)**.** a) Soit p un nombre premier, montrer que $(p-1)! \equiv -1\,[p]$.
Indication – Regrouper chaque élément de $\{1,\dots,p-1\}$ avec son inverse dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
b) Réciproquement, montrer que si $n \geq 2$ vérifie $(n-1)! \equiv -1\,[n]$ alors n est premier.
c) Retrouver le résultat du a) en factorisant le polynôme $X^{p-1}-1$ dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$.

Exercices « abstraits » sur les idéaux... pour Centrales/Mines

Exercice 3 (Centrale et Mines MP 2022)**.** Si A est un anneau commutatif et I un idéal de A on note $\sqrt{I}$ (appelé le radical de I) l'ensemble des $x \in A$ pour lesquels il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $x^n \in I$.

a) Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal contenant I.
b) Déterminer les radicaux des idéaux de $\mathbf{Z}$.

Exercice 4 (Centrale 1 2022)**.** Soit K un $\mathbb{R}$-algèbre commutative intègre de dimension finie $n \geq 2$.

a) Soit $a \in K \setminus \{0\}$, montrer que $f : x \mapsto a.x$ est un automorphisme et donc que K est un corps.
b) Soit $a \in K \setminus \mathbb{R}$, montrer que $(1,a)$ est libre et que $(1,a,a^2)$ est liée.
c) En déduire que K contient un élément $\iota \in K$ tel que $\iota^2 = -1$.
d) Prolongement de l'exercice : montrer que $K = \mathrm{Vect}(1,\iota)$.

Indication pour la deuxième partie du b) Considérer les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ annulateurs non nul de a et montrer que le polynôme minimal de a est irréductible.

Rappels sur l'arithmétique des polynômes et les complexes

Exercice 5. Déterminer les réels a et b pour que $A = aX^{n+1}+bX^n+1$ soit divisible par $B = X^2+X+1$ et déterminer le quotient.

Exercice 6. Calculer le pgcd de $X^5 - X^4 + 2X^3 + 1$ et $X^5 + X^4 + 2X^2 - 1$.

Exercice 7 (Calcul de reste sans « poser la division »)**.** a) Expliciter le reste de la division euclidienne de $(X+\sqrt{3})^{17}$ par X^2+1.
b) Calculer le reste de la division euclidienne de $X^4 + 7X^3 - X^2 + 2X - 1$ par $(X-1)^2$.

Exercice 8. Soit $p \in \mathbb{N}$. Décomposer en irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = X^{2p} - 1$.

Polynômes appliqués à des matrices :

Exercice 9. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.
(i) Vérifier qu'en notant $P = X^2 - 6X + 5$ on a $P(A) = 0$.
(ii) En utilisant le reste de la division euclidienne de X^n par P, expliciter A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10. Soit (F_n) la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1}+F_n$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}$.
a) Déterminer une matrice $A \in M_2(\mathbb{Q})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
b) Déterminer comme à l'exercice précédent un polynôme annulateur de A, de degré 2. Et en déduire une formule explicite de A^n.
c) Déduire alors de ce qui précède la formule explicite de F_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercices de révisions supplémentaires :

Exercice 11. Soit $z = \dfrac{1}{6+6i}$ et $n \in \mathbb{N}^*$; calculer les racines n-ièmes de z.

Exercice 12. a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right)^n = i$.

b) Vérifier que toutes les solutions sont réelles. Comment pouvait-on le savoir à l'avance ?

Exercice 13 (interpolation d'Hermite)**.** Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ deux à deux distincts. Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ quelconques. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ tel que $\forall\, i \in [[1, n]]$, $P(x_i) = a_i$ et $P'(x_i) = b_i$.

Exercice 14. Soient $a_0, \ldots, a_n$ des nombres complexes deux à deux distincts. Montrer que $((X - a_0)^n, \ldots, (X - a_n)^n))$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Exercice 15. Décomposer en polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes : $X^4 + 1$, $X^4 + X^2 + 1$, $(X^2 - X + 1)^2 + 1$.

Exercice 16 (Comment trouver toutes les racines rationnelles d'un polynôme à coeff. entiers)**.** Soit $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ un polynôme non constant (i.e. $n \geq 1$), à coefficients $a_i \in \mathbb{Z}$. On suppose que P admet une racine rationnelle $\frac{p}{q}$, qu'on suppose écrite sous forme irréductible i.e. avec $p \wedge q = 1$.

a) Montrer que $q|a_n$, $p|a_0$ et que pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $p - mq$ divise $P(m)$; en particulier $p - q$ divise $P(1)$ et $p + q$ divise $P(-1)$.

b) En déduire que le théorème suivant :
Théorème – *si $P \in \mathbb{Z}[X]$ est* unitaire*, ses racines sont ou bien dans $\mathbb{Z}$ ou bien irrationnelles.*

c) Montrer que si $P \in \mathbb{Z}[X]$ est unitaire et si, en outre $P(0)$ et $P(1)$ sont tous les deux impairs, alors toutes les racines sont irrationnelles.

Exercice 17. Trouver un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 6 tel que : $(X-1)^3|P(X)+1$ et $X^4|P(X)+2$.

Exercice 18. L'ensemble des $\mathbb{D}$ nombres décimaux, avec les lois usuelles, est-il un anneau ? Est-il un corps ?

Exercice 19. a) Donner des exemples de sous-algèbres de $M_n(K)$.

b) Montrer que si $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $M_n(K)$ et si $A \in \mathcal{A}$ est une matrice inversible dans $M_n(K)$ alors $A^{-1} \in \mathcal{A}$.

Exercice 20. Montrer que si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ alors l'application $\Phi : M_n(K) \to M_n(K)$, $M \mapsto AMA^{-1}$ est un morphisme d'algèbre, bijectif, donc un automorphisme d'algèbre.