Chap. R4 bonus : Différentes décompositions matricielles utiles

Les exercices suivants s'enchaînent en fait ici comme les questions d'un problème.

Exercice 1 (Décomposition $Q.R.$ traduction matricielle de Gram-Schmidt)**.** Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique couple (Q, R) avec $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et R triangulaire supérieure à diagonale strictement positive telle que

$$A = QR.$$

Indication – Pour l'existence, on pensera en terme de matrice de passage et de Gram-Schmidt.

Exercice 2 (Toute matrice SDP est une matrice de Gram (et réciproquement))**.** Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$A \in S_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists\, M \ \in M_n(\mathbb{R}) \quad A = M^\top.M.$$

Rappel : $M^\top.M(i,j) = (C_i|C_j)$ cette matrice de p.s. s'appelle *matrice de Gram.*

Exercice 3 (Décomposition de Choleski)**.** Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive.

Montrer qu'il existe une unique matrice B triangulaire inférieure à éléments diagonaux strictement positifs telle que $A = BB^\top$ ou encore une unique matrice triangulaire supérieure T à éléments diagonaux st. positifs telle que

$$A = T^\top T.$$

Indication pour l'existence : on peut utiliser les deux exercices précédents.

Exercice 4 (Application de décomposition de Choleski)**.** a) Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice symétrie réelle positive. Montrer que

$$0 \leq \det(A) \leq \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

Si A est définie positive, montrer aussi que l'égalité n'a lieu que si A est diagonale.

b) Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$, montrer l'inégalité de Hadamard suivante :

$$|\det(M)| \leq \prod_{j=1}^{n} ||C_j||$$

où $||C_j|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} m_{i,j}^2}$.

Déterminer aussi la CNS d'égalité, et interprétation géométrique pour $n = 2$ ou $n = 3$?

Exercice 5 (Décomposition polaire de Cartan)**.** Montrer que tout $M \in GL_n(\mathbb{R})$ se décompose de manière unique sous la forme $M = OS$ avec O orthogonale et S symétrique définie positive.
Remarque : Ce résultat est démontré (et utilisé) dans le D.M. 13

Exercice 6 (Jolie application de l'unicité dans Choleski pour un résultat sur l'action du groupe orthogonal)**.**

a) Soit M et M' deux matrices inversibles de $M_n(\mathbb{C})$. Montrer que ${}^tMM ={}^t M'M'$ si, et seulement si, il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $M' = OM$.

b) Interprétation géométrique : soient $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ sont deux familles libres de vecteurs d'un e.v. euclidien E ayant même matrice de Gram i.e.telle que pour tout (i,j), $(x_i|x_j) = (y_i|y_j)$.

Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{O}(E)$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f(x_i) = y_i$.

Solution 1 *Unicité* — Si $Q_1R_1 = Q_2R_2$, on a $Q_2^{-1}Q_1 = R_2R_1^{-1}$ qui est alors une matrice orthogonale, TS, à diag. > 0.

Or *il faut savoir que l'inverse d'une matrice TS inversible est aussi TS*. La façon la plus simple de le voir est de penser en terme de drapeau stable par f, il l'est aussi par f^{-1}.

Donc ici on a une matrice orthogonale TS l'inverse est TS, mais l'inverse est aussi la transposée donc, la matrice est diagonale.

Mais la seule v.p. > 0 d'une matrice orthogonale est 1 (car les v.p. d'une matrice orthogonales sont de module 1). Donc la matrice considérée est la matrice unité I.

Donc $Q_2^{-1}Q_1 = I = R_2R_1^{-1}$ donne l'unicité.

Remarque : on a pu ainsi éviter d'utiliser le fait qu'une matrice orthogonale est toujours diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Existence – C'est comme souvent, une conséquence de Gram-Schmidt.

Soit $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ euclidien. Soit f can. associé à A. Soit $\mathcal{B} = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ la base représentée par les colonnes de A.

On orthonormalise suivant Gram-Schmidt, la base $\mathcal{B}$ en une b.o.n. $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^n$. On note $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ la matrice de passage, qui est T.S. à diag. stmt positive.

Alors $P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{C}}$ est une matrice orthogonale puisque $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{C}$ sont des b.o.n.

Comme $A = P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}}$ la formule de changement de base (en notation matrice de passage) donne :

$A = P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{C}}.P_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = QR$ où Q est bien orthogonale et R est bien T.S. à diag. stmt positive (comme inverse du T défini plus haut).

Solution 2 Sens $\Leftarrow$ facile $X^\top M^\top MX = (MX)^\top.(MX) = \|MX\|^2 \geq 0$L

Sens$\Rightarrow$: par thme spectral. $A = PDP^{-1}$ avec $P \in O_n(\mathbb{R})$ et D à diagonale positive

Donc on a aussi $P^{-1} = P^\top$ et si on note $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $\Delta = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$, on peut écrire $D = \Delta^2 = \Delta^\top.\Delta$.

Alors $A = P\Delta\Delta^\top P^\top = M.M^\top$ avec $M = P\Delta$.

Solution 3 Avec l'ex. 2. on écrit $A = M.M^\top$. Avec l'ex. 1.,on décompose $M = QR$ avec Q orthogonale et R T.S., alors $M^\top = R^\top Q^\top$. Alors $M^\top.M = R^\top Q^\top QR = R^\top R$.

Solution 4 a) Si $\det(A) = 0$ c'est trivial. On suppose donc A déf. positve. Avec Choleski,, $A = {}^tTT$ avec T T.S. à diag. > 0.

On a $\det(A) = \det(T)^2 = (t_{1,1} \dots t_{n,n})^2$.

Mais $a_{i,i} = \sum_{k=1}^n t_{k,i}t_{k,i} = \sum_{k=1}^n t_{k,i}^2 \geq t_{i,i}^2$ donne la conclusion.

CNS d'égalité : tous les $t_{k,i}^2$ non diagonaux doivent être nuls i.e. T diagonale donc A diagonale.

b) On applique le résultat du a) à $A = {}^tMM$ symétrique positive.

Donc $\det(A) = \det(M)^2 \leq (a_{1,1} \dots a_{n,n})^2$.

Mais A étant la matrice de Gram des colonnes de M, $a_{i,i} = (C_i|C_i) = \sum_{k=1}^n m_{k,i}^2$ et la conclusion.

CNS d'égalité : A est diagonale i.e. les colonnes de M sont 2 à 2 orthogonales.

Interp. géom. si $n = 2$ l'aire du parallelogramme est inférieure à celle du rectangle etc..

Solution 5 C.N. (et unicité) : si on a une telle décomposition ${}^tM = {}^tS{}^tO = SO^{-1}$ donc ${}^tMM = S^2$ i.e. S est une racine carrée déf. positive de la matrice sym. déf. positive ${}^tMM$.

L'existence d'une telle racine carré est claire par la diagonalisation en b.o.n. Montrons l'unicité :

Lemme – Montrer qu'une matrice SDP admet une unique racine carrée SDP.

Preuve du lemme – L'existence facile $S = P\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)P^{-1}$ avec les $\lambda_i > 0$ et $P \in O(n)$. On prend $S_1 = P\operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})P^{-1}$ SPD.

Unicité : si S_1 et S_2 vérifient $S_1^2 = S_2^2 = S$, alors on peut voir aussi S_1 comme un polynôme en S. En effet, par interpolation de Lagrange, il existe un polynôme Q tel que $Q(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

Donc pour ce polynôme Q, on a $Q(S) = S_1$. Donc comme $S = S_2^2$, S_1 est un polynôme en S_2 donc S_1 et S_2 commutent, donc diagonalisent simultanément, mais avec les mêmes v.p. donc sont égales. □

La C.S. est alors évidente : on prend S la racine carré déf. positive de ${}^tMM$ et on prend $O = MS^{-1}$ on vérifie immédiatement que $O \in O(n)$. □

Solution 6 Sens facile : si $M' = OM$ alors ${}^tM' =^t M^tO =^t MO^{-1}$ et ${}^tM'M' =^t MO^{-1}OM =^t MM$.

Sens inverse : on a ${}^tMM =^t M'M'$.

On commence par considérer la décomposition $M = QR$ (resp. $M' = Q'R'$) avec $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et $R \in TS_n(\mathbb{R})$ à diagonale strictement positive.

Alors ${}^tMM =^t RR$ et donc l'hypothèse donne que ${}^tRR =^t R'R'$ avec R' T.S. à diagonale strictement positive.

L'unicité dans Cholesky donne alors que $R = R'$.

Et donc $M = QR$ et $M' = Q'R$ ce qui donne $M' = Q'Q^{-1}M = \Omega M$ avec $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$. □