

Banque CCINP : Ex. 33, 41, 52, 56, 57, 58.

Continuité, différentiabilité, caractère $\mathcal{C}^1$ de fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ « concrètes »

Exercice 1. On pose $f(x, y) = \frac{x^5}{(y - x^2)^2 + x^8}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

En considérant $f(x, x^2)$ justifier que f n'est pas continue en 0. Montrer néanmoins que f admet une dérivée suivant tout vecteur en 0.

Exercice 2 (Vérification du caractère $\mathcal{C}^1$). Soit $f(x, y) = \frac{x^3 y^2}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et $f(0, 0) = 0$. Montrer que la fonction f ainsi définie est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 (Comment montrer qu'une fonction n'est pas $\mathcal{C}^1$). On pose $f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$? De classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 4 (Pour bosser mais pas trop). Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} \exp(1/(x^2 + y^2 - 1)) & \text{si } x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Montrer que la fonction f suivante est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ (et même $\mathcal{C}^\infty$ en fait).

Calcul de différentielles sans passer par les dérivées partielles

Exercice 5 (Exemples traités en cours ou proches).

- Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Expliciter $df(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
- Soit E un espace vectoriel euclidien, et $\| \cdot \|$ sa norme euclidienne. Montrer que cette application norme de $E \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}^+$ est différentiable et calculer sa différentielle de deux manières : **(M1)** sans coordonnées, en reliant la norme au produit scalaire, et en utilisant la linéarité du p.s **(M2)**
- Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et (en identifiant $M_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^n$), $f : x \mapsto (Ax|x)$. Calculer $df(x)$ et $\nabla f(x)$ en tout point $x \in \mathbb{R}^n$. (avec les deux méthodes du b)).
- Calculer le gradient de l'application $\det : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ (pour le p.s can.) et en déduire la différentielle du déterminant.

Exercice 6. a) Dans $E = M_n(\mathbb{K})$ pour $f : M \rightarrow M^2$, calculer $df(A).H$ pour tout $(A, H) \in E^2$.

b) Généralisation du a) pour $f : M \rightarrow M^p$?

Exercice 7. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $f : x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mapsto f(x) := \frac{\langle Ax, x \rangle}{\|x\|^2}$. Calculer $\nabla f(x)$ en $x \neq 0$ et le comparer à la projection orthogonale de Ax sur l'hyperplan H_x orthogonal à x .

Utilisation de la dérivation le long d'une courbe (souvent une droite)

Exercice 8 (Cas de l'inversion de matrice). a) Justifier à l'aide du cours que $f : M \in GL_n(\mathbb{K}) \mapsto M^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

b) A l'aide de l'exercice fait sur la planche F_1 pour les applications $t \mapsto A(t)^{-1}$, donner une formule pour $df(A).H$ pour tout $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $H \in M_n(\mathbb{K})$.

Exercice 9. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, soit $\bar{x} \in U$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur U , différentiable sur $U \setminus \{\bar{x}\}$.

On suppose que $\forall x \in U \setminus \{\bar{x}\}, df(x).(x - \bar{x}) \geq 0$ (*).

Montrer que f admet un minimum local en $\bar{x}$.

Extrema globaux

Exercice 10 (Fonctions convexes : caractérisations par la différentielle). Soit Ω un ouvert convexe de $E = \mathbb{R}^n$. Soit $f \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$.

On dit que f est convexe sur Ω ssi $\forall (a, b) \in \Omega^2, \forall t \in [0, 1], f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$.

a) Fonctions auxiliaires d'une variable réelle :

Pour tout $a \in \Omega$ et tout $x \in E \setminus \{0\}$, on pose $I_{a,x} = \{t \in \mathbb{R}, a + tx \in \Omega\}$.

On pose $\varphi_{a,x} : I_{a,x} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f(a + tx)$.

Montrer que f est convexe sur Ω si, et seulement si, toutes les fonctions $\varphi_{a,x}$ pour $a \in \Omega$ et $x \in E$ sont convexes.

b) On suppose que $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$.

Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- f est convexe sur Ω ,

$$(ii) \forall (a, b) \in \Omega^2, df(b)(b-a) \geq df(a)(b-a),$$

$$(iii) \forall (a, b) \in \Omega^2, f(b) - f(a) \geq df(a)(b-a).$$

On pourra admettre l'implication (iii) $\Rightarrow$ (i)

c) On suppose encore que f est différentiable et convexe sur Ω . Soit $a \in \Omega$ un point critique de f i.e. tel que $df(a) = 0$. Montrer que $f(a)$ réalise le minimum global de f sur Ω .

Exercice 11 (Exemple fondamental de fonctions convexes : les formes quadratiques positives). Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. On identifie $M_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^n$ et on note $Ax \in \mathbb{R}^n$ l'image du vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ par la matrice A .

On considère la forme quadratique $f : x \mapsto (Ax|x)$ où $(| |)$ est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer que si A est une matrice symétrique *positive* alors f est une fonction convexe.

b) Montrer que si A est une matrice symétrique *définie positive* alors f est une fonction strictement convexe.

Exercice 12 (Cas d'une fonction strictement convexe coercive). Soit E un e.v.n. de dim. finie et C un sous-ensemble convexe de E .

a) Soit $f : C \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est *strictement convexe* sur C ssi pour tout $(a, b) \in C^2$ avec $a \neq b$ et pour tout $t \in]0, 1[$, $f((1-t)a + tb) < (1-t)f(a) + tf(b)$. On suppose donc au a) et b) que f est stmt convexe sur C .

Montrer que si f admet minimum dans C alors celui-ci est atteint en un unique point.

b) On suppose que C est un convexe fermé et que $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ est coercive sur C ce qui signifie que si C est non borné $f(x) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty$. Montrer que f admet un unique minimum dans C .

c) Exemple concret : on identifie $\mathbb{R}^n$ à $M_{n,1}(\mathbb{R})$ et on considère $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{2}(Ax|x) + (b|x) + c$ avec A une matrice symétrique définie positive, $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$.

Montrer que f admet un minimum dans $\mathbb{R}^n$, atteint en un unique point $\bar{x}$.

Hessienne

Exercice 13. a) Pour $A \in S_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto \frac{1}{2} \langle Ax|x \rangle + \langle b|x \rangle + c$.

Déterminer la hessienne $H_f(x)$ en tout point $x \in \mathbb{R}^n$.

b) Soit $r \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $g(x) = r(x)^2$. Calculer $H_g(x)$ en tout point $x \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 14. Soit $f \in C^2(U, \mathbb{R})$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Montrer que f est convexe sur U ssi $\forall x \in U$, $H_f(x) \in S_n^+(\mathbb{R})$.

Indication Pour le sens $\Leftarrow$, on pourra montrer que pour chaque couple $(x, y) \in U^2$, $\varphi : t \mapsto f(tx + (1-t)y)$ vérifie $\varphi'' \geq 0$ sur $[0, 1]$.

Etude locale à l'ordre deux pour les extrema

Exercice 15. Déterminer les extremums relatifs (i.e. locaux) et absolus (i.e. globaux) de

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^4 + y^4 - 2(x - y)^2.$$

Indication – Pour l'étude en $(0, 0)$, on n'a pas de théorème mais on peut s'en tirer avec une idée simple.

Extrema sous contrainte

Exercice 16 (Cas où on a un *paramétrage* de l'hypersurface.. on se ramène à des extrema libres). Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$. Soit C le cercle unité.

Déterminer les extrema de $f|_C$ de deux façons :

- en paramétrant le cercle unité avec $\theta \mapsto (\cos(\theta), \sin(\theta))$
- avec le théorème sur les extrema liés.

Exercice 17 (Où l'on redémontre qu'une matrice symétrique réelle admet une v.p. réelle). Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. On identifie $M_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^n$, muni de son p.s. can. et on considère $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto (Ax|x)$. On note S la sphère unité de $\mathbb{R}^n$.

a) Justifier que $f|_S$ admet un max. et un min.

b) A l'aide de la caractérisation différentielle des extrema locaux de $f|_S$, démontrer qu'il existe un $x \in S$ tel que Ax et x soient colinéaires, i.e. que A admet une v.p. réelle.

Exercice 18. a) Rappeler la définition de $\cos(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

b) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x, y) = \cos(x + iy)$. Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles $\cos, \operatorname{ch}, \operatorname{sh}, \sin$ d'une variable réelle, puis en déduire une expression simple de $g(x, y) = |f(x, y)|^2$

c) Etudier les extrema de $|f|$ sur la boule unité fermée de $\mathbb{R}^2$.

Indication (méthode générale) Sur la boule ouverte, on sait faire ... sur le bord, on paramètrera par la variable x .

Détermination d'hyperplans tangents

Exercice 19 (Cas d'une surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = f(x, y)$). Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. Soit $X = \{(x, y, z) \in U \times \mathbb{R}, z = f(x, y)\}$. Déterminer $T_m X$ pour tout $m \in X$ de deux façons différentes :

- a) A l'aide du théorème du cours pour les hyperplans tangents à une hypersurface en un point régulier,
- b) Sans ce théorème, seulement avec la définition de $T_m X$.

N.B. L'intérêt du b) est bien sûr qu'on a n'a pas démontré le théorème invoqué au a) (seulement une des deux inclusions). Le fait de pouvoir la démontrer l'inclusion difficile « à la main » dans ce cas au b) fait sentir ce dont on aurait besoin dans le cas général et qui s'appelle le théorème de la fonction implicite.

Exercice 20 (Mines).

- a) Montrer que $T_{I_n}(O_n(\mathbb{R})) \subset A_n(\mathbb{R})$ où on note $A_n(\mathbb{R})$ l'e.v. des matrices antisymétriques.
- b) Montrer l'inclusion réciproque en considérant, pour chaque $A \in M_n(\mathbb{R})$ la courbe $c : t \mapsto \exp(tA)$.

E.D.P.

Exercice 21. Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante d'inconnue $f :]0; +\infty[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ à l'aide d'un passage en coordonnées polaires,

$$(E) : -y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + y + f(x, y)$$

Exercice 22 (Se ramène par changement de var. à l'équation des ondes). On suppose connue la forme générale des solutions à l'équation des ondes sur $\mathbb{R}^2$ cf cours de maths et de physique !.

Soit $U = (\mathbb{R}^{++})^2$. Trouver toutes les applications $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall (x, y) \in U, \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{x^3} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{y^3} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

à l'aide du changement de variable $u = x^2, v = y^2$.

Fonctions harmoniques

Exercice 23 (Principe du maximum pour les fonctions harmoniques). Soit B la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^n$ et $\bar{B}$ la boule unité fermée. Soit S la sphère unité. Soit $f \in \mathcal{C}(\bar{B}, \mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur la boule ouverte B .

- a) On suppose que $f|_S \leq 0$ et qu'il existe un $x_0 \in B$ tel que $f(x_0) > 0$. On veut montrer qu'il existe un $x_1 \in B$ tel que $\Delta f(x_1) < 0$.
 - i) Pourquoi est-il clair qu'en tout cas il existe un x_1 tel que $\Delta f(x_1) \leq 0$.
 - ii) On considère pour $\varepsilon > 0$ la fonction $f_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon(\|x\|^2 - 1)$ Comparer Δf_ε et Δf .
 - iii) En déduire qu'il existe un x_2 tel que $\Delta f(x_2) < 0$.
- b) On suppose maintenant que f est une fonction harmonique i.e. vérifiant $\Delta f = 0$ sur B .
Montrer que $\min_{\bar{B}} f = \min_S f$ et $\max_{\bar{B}} f = \max_S f$

Exercice 24 (Propriété de la moyenne des fonctions harmoniques). Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

On suppose que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$

- a) Montrer l'existence de $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial y}$$

- b) Pour $r \geq 0$, on pose $\varphi(r) := \int_0^{2\pi} f(r \cos t, r \sin t) dt$. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$, puis calculer φ' . Interpréter le résultat obtenu.

Remarque : Si on connaît l'expression du Laplacien en coordonnées polaires, on peut aussi faire le b) plus directement.