

Exercice 1 (Démon. de Riesz avec la précompacité). Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. tel que la boule unité fermée B soit compacte. On veut montrer que E est de dim. finie.

Pour cela, comme B est compacte, par l'exercice sur la précompacité, il existe un ensemble fini $x_1, \dots, x_n$ d'éléments de B tels que $B \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \frac{1}{2})$.

On note $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$. Montrer que $B \subset F$ et donc que $E = F$.

Indication – Soit $x \in B$, on a un $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\|x - x_{i_0}\| < 1/2$, on note $f_0 := x_{i_0}$.

Comment en déduire la construction d'un $f_1 \in F$ tel que $\|x - f_1\| < 1/4$?

Exercice 2 (Démon. de Riesz avec le lemme sur le vecteur unitaire pseudo-orthogonal..). Soit E un e.v.n.

a) Soit F un s.e.v. de dim. finie de E et $x \in E \setminus F$. Montrer qu'il existe un $\tilde{x} \in F$ tel que $d(x, F) = \|x - \tilde{x}\|$.

b) Montrer que si $F \neq E$, en notant S la sphère unité de E , il existe un $x \in S$ tel que $d(x, F) = 1$.

c) En déduire que si E est de dim. infinie, on peut fabriquer une suite $(x_i) \in S^{\mathbb{N}}$ telle que $\|x_i - x_j\| \geq 1$ pour tout $i \neq j$.

d) En déduire que la sphère unité de E de dim. infinie n'est jamais compacte.