

Exercice 21 (Transformation d'Abel et démonstration de CVU radiale, et donc du théorème radial d'Abel).

1) **Théorème de convergence uniforme radiale :** On considère $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum a_n z^n$ soit de rayon de convergence $R > 0$.

On suppose que la série numérique $\sum a_n R^n$ converge (pas forcément absolument!).

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n : [0, R] \rightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto a_n x^n$. On sait que $\sum u_n$ CVS sur $[0, R]$.

On va démontrer que $\sum u_n$ CVU sur $[0, R]$.

Question : Justifier qu'il suffit de démontrer ce théorème dans le cas où $R = 1$.

2) **Démonstration dans le cas $R = 1$** On se place donc dans les hypothèse du 1) avec $R = 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, 1]$ on pose $\rho_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k$ et $r_n = \rho_n(1) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.

a) La transformation d'Abel (I.P.P. discrète) : justifier que pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k = r_n x^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} r_k (x^{k+1} - x^k).$$

Indication – Pour vraiment comprendre le processus d'I.P.P. discrète et prouver cette égalité de gauche à droite, penser à écrire $a_k = r_{k-1} - r_k$.

b) En déduire que si on note $\varepsilon_n := \sup_{k \geq n} |r_k|$, on a :

$$\forall x \in [0, 1], \quad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k \right| \leq 2\varepsilon_n$$

c) Conclure pour la convergence uniforme annoncée.

3) Déduire du théorème du 1) le théorème de continuité du cours.

Solution 21 1) Il suffit de faire le changement de variable $t = x/R$ (détailler les justifications).

2) a) Pour comprendre l'idée derrière cette transformation, on pense vraiment en terme d'I.P.P. discrète :

L'idée est que $a_k = r_{k-1} - r_k$ est la dérivée discrète de r . De l'autre $x^{k+1} - x^k$ est la dérivée discrète de x^k .

Plus précisément, avec $a_k = r_{k-1} - r_k$, on peut écrire $a_k x^k = (r_{k-1} - r_k)x^k$

Donc en considérant une somme partielle : $\sum_{k=n+1}^N a_k x^k = \sum_{k=n+1}^N (r_{k-1} - r_k)x^k$ en séparant en deux sommes

et réindexant :

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^N a_k x^k &= \sum_{k=n+1}^N r_{k-1} x^k - \sum_{k=n+1}^N r_k x^k, \\ &= \sum_{k=n}^{N-1} r_k x^{k+1} - \sum_{k=n+1}^N r_k x^k, \\ &= r_n x^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{N-1} r_k (x^{k+1} - x^k) + r_N x^N \quad (*) \end{aligned}$$

Comme $r_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$, et $x \in [0, 1]$, on a $r_N x^N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$ et comme le premier membre de $(*)$ est aussi convergent pour $N \rightarrow +\infty$, on conclut que la somme $\sum_{k=n+1}^{N-1} r_k (x^{k+1} - x^k)$ converge aussi pour $N \rightarrow +\infty$ et qu'on a l'égalité demandée :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k = r_n x^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} r_k (x^{k+1} - x^k).$$

b) Soit $x \in [0, 1]$, en passant aux modules dans l'égalité précédente et par I.T. :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k \right| \leq |r_n| x^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} |r_k| |x^{k+1} - x^k|$$

Mais comme $x \in [0, 1]$, on sait que $x^{n+1} \leq 1$ et $|x^{k+1} - x^k| = x^k - x^{k+1}$ et pour tous les $k \geq n$, on peut utiliser la majoration $|r_k| \leq \varepsilon_n$, on obtient donc :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k \right| \leq \varepsilon_n + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varepsilon_n (x^k - x^{k+1}) = \varepsilon_n + \varepsilon_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} (x^k - x^{k+1}) = \varepsilon_n + \varepsilon_n x^{n+1} \leq 2\varepsilon_n$$

c) Le majorant obtenu au b) est indépendant de x , donc $\sup_{x \in [0,1]} \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k \right| \leq 2\varepsilon_n$.

Ceci montre, par déf., la CVU de la série de fonctions $\sum a_n x^n$ sur $[0, 1]$.

3) Enfin, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto a_n x^n$ est continue sur $[0, R]$ et on a la CVU de $\sum a_n x^n$ sur $[0, R]$, on peut appliquer le théorème de continuité d'une limite uniforme,

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ est continue sur } [0, R].$$