

Solution Pl S2 Ex 11

Exercice 11 (Cas d'une série ne vérifiant pas le T.S.A. mais s'y ramenant).

- a) Justifier qu'on peut poser, pour tout $x > 1$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nx + (-1)^n}$.
- b) Montrer que la fonction f est continue sur $]1, +\infty[$.
- c) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Solution 11 a) A x fixé, on peut utiliser les outils des séries numériques.

On pose $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{nx + (-1)^n}$.

Comme la série ne relève pas directement du T.C.S.A. (cf. remarque 3 ci-dessous) on peut :

(M1) la plus standard faire un DL en la variable $1/n$ et écrire $\frac{(-1)^n}{nx + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{nx} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Comme la série de t.g. $\frac{(-1)^n}{nx}$ CV par TCSA et celle de T.G. $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge par théorème de comparaison, on a la conclusion : $\sum u_n$ converge ;

Remarque 1 : La condition $x > 1$ sert seulement à la bonne déf. de f (les dénom. $nx + (-1)^n$ sont supérieurs strmt à $n + (-1)^n$ donc jamais nuls).

(M2) Remi, très utile aussi par exemple pour l'ex. 10 fin ! faire un groupement des termes deux par deux : on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = u_{2n} + u_{2n+1}$$

. Alors :

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{2nx+1} - \frac{1}{(2n+1)x-1} \\ &= \frac{x-2}{(2nx+1)((2n+1)x-1)} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x-2}{4n^2x^2} \quad \text{TGSC} \end{aligned}$$

Donc par théorème sur les équivalents (comparaison à TGSC de signe constant), on conclut que $\sum v_n$ converge.

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, en notant $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$, on a : $S_{2n} = \sum_{k=0}^n v_k$ donc (S_{2n}) converge vers une limite ℓ .

Comme $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, on a $S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ de même limite. On conclut bien que la suite (S_n) converge i.e la série $\sum u_n$ converge.

Remarque 2 : La méthode précédente avec (S_{2n}) et (S_{2n+1}) montre que la méthode de regroupement par paquets de deux s'applique à toute série (de signe quelconque) dont le terme général tend vers zéro (cf. chap. S1).

Remarque 3 (Stéphane) : pourquoi la série ne vérifie-t-elle pas les hypothèses du T.C.S.A. ?

D'abord remarquons que pour $x > 1$ et $n \geq 2$, $nx + (-1)^n \geq 2x - 1 > 2 - 1 = 1$ en particulier est strictement positif.

Pour $a_n = \frac{1}{nx + (-1)^n}$, on a donc :

$$a_n \geq a_{n+1} \Leftrightarrow (n+1)x + (-1)^{n+1} \geq nx + (-1)^n \Leftrightarrow x \geq (-1)^n - (-1)^{n+1} = 2 \cdot (-1)^n$$

Donc pour $x \geq 2$, on a en fait la décroissance de (a_n) et le T.C.S.A. s'applique.

En revanche pour $x \in]1, 2[$, on aura $a_n > a_{n+1}$ ssi n est impair, donc la suite (a_n) n'est pas monotone.

b) Comme pour chaque n , $x \mapsto u_n(x) = \frac{(-1)^n}{nx + (-1)^n}$ est continue sur $]1, +\infty[$, il suffit, par théorème de continuité d'une limite uniforme, de montrer que $\sum u_n$ CVU STS de $]1, +\infty[$.

Avec la (M1) du a)

On doit majorer uniformément le terme en $O(1/n^2)$ du a).

Mais attention le $O_{n \rightarrow +\infty}()$ cache complètement la dépendance en x .

Donc on doit réécrire ce terme explicitement et c'est bien sûr, pour $n \geq 1$,

$$\frac{(-1)^n}{nx + (-1)^n} - \frac{(-1)^n}{nx} = -\frac{1}{nx(nx + (-1)^n)}.$$

Or pour tout $x > 1$ et tout $n \geq 2$ $nx + (-1)^n \geq nx - 1 \geq n - 1 > 0$ donc

$$\left| \frac{1}{nx(nx + (-1)^n)} \right| \leq \frac{1}{n(n-1)} \quad (\dagger).$$

Le majorant étant TGSC, ceci prouve que la série de fonction $\sum_{n \geq 1} -\frac{1}{nx(nx + (-1)^n)}$ converge *normalement* sur $]1, +\infty[$.

Mais alors en écrivant suivant l'idée de la (M1) du a) :

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{nx(nx + (-1)^n)}$$

(1er premier terme 1 est le terme d'indice 0). on vient de montrer que la dernière somme converge normalement par rapport à $x \in]1, +\infty[$ donc avec le rappel fait en début de question f est bien continue sur $]1, +\infty[$

c) La convergence normale prouvée au b) permet aussi d'appliquer le théorème de sommation des limites : comme chaque terme de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{nx(nx + (-1)^n)}$ tend vers 0 quand $x \rightarrow +\infty$ et que cette série converge normalement pour $x \in]1, +\infty[$, on conclut que la somme tend vers zéro, et avec $(\dagger)$ on conclut que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$.