

## DM 6 : Prolongement des formes linéaires

*Pour le lundi 21 novembre*

### I Prolongement d'une forme définie sur un hyperplan

Dans cette partie,  $E$  désigne un espace vectoriel normé réel non réduit à  $\{0\}$ , de dimension finie ou infinie.

On considère  $F$  un hyperplan de  $E$  i.e. un s.e.v.  $F$  de  $E$  tel qu'il existe une droite  $D$  vérifiant  $F \oplus D = E$ .

Soit enfin  $\ell$  une forme linéaire sur  $F$  satisfaisant  $|\ell(x)| \leq \|x\|$  pour tout  $x$  élément de  $F$ .

Le **problème P** consiste à prolonger  $\ell$  en une forme linéaire  $L$  définie sur  $E$  tout entier satisfaisant  $|L(x)| \leq \|x\|$  pour tout  $x$  élément de  $E$ . Une telle forme  $L$  sera appelée une solution du **problème P**.

**Question 1)** On suppose dans cette question seulement que  $E$  est euclidien i.e. de dimension finie et muni d'un produit scalaire noté  $(\cdot | \cdot)$ .

a) Justifier qu'il existe un vecteur  $a \in F$  telle que pour tout  $x \in F$ ,  $\ell(x) = (a|x)$ .

b) En déduire une solution  $L$  du **Problème P** pour  $\ell$ .

**Question 2)** On suppose dans cette seule question que  $E = \mathbb{R}^2$  muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ .

a) Soit une forme linéaire  $L$  sur l'espace  $E$ . On sait que  $L$  est donnée par la formule  $L : (x, y) \in E \mapsto ax + by$ , où  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Montrer que  $\|L\| = |a| + |b|$ .

b) On choisit pour  $F$  la droite vectorielle engendrée par le vecteur  $\varepsilon = (1, 1/2)$  et pour  $\ell$  la forme linéaire sur  $F$  satisfaisant  $\ell(\varepsilon) = 1$ . Chercher *toutes* les solutions du **Problème P** pour  $\ell$ .

**Question 3) Retour au cas le plus général de l'introduction :** On suppose  $E, F$  et  $\ell$  donnés et l'on choisit  $x_0 \in E$  tel que  $E = F \oplus \text{Vect}(x_0)$

a) Soit  $E_+ = \{\|x_0 + x\| - \ell(x), x \in F\}$  et  $E_- = \{\ell(y) - \|y - x_0\|, y \in F\}$ . Montrer que

$$\sup E_- \leq \inf E_+.$$

b) En déduire qu'il existe au moins un réel  $a$  tel que

$$\forall x \in F, \quad \begin{cases} \ell(x) + a \leq \|x + x_0\| \\ \ell(x) - a \leq \|x - x_0\|. \end{cases}$$

c) On choisit alors un tel réel  $a$  et, pour  $y = x + \lambda x_0 \in E$ , on pose  $L(y) = \ell(x) + \lambda a$ .

i) Justifier que, pour vérifier que  $L$  ainsi définie est solution du **problème P**, il suffit de vérifier que si  $y = x + \lambda x_0$  avec  $x \in F$  et  $\lambda \neq 0$  alors :

$$L(y) \leq \|y\|$$

ii) Démontrer que l'inégalité du (i) est vraie pour les  $y = x + \lambda x_0$  avec  $\lambda > 0$  à l'aide de la définition du réel  $a$ .

iii) Faire le même travail pour les  $y = x - \lambda x_0$  avec  $\lambda > 0$ .

Au total on a bien montré que  $L$  était solution du **problème P** pour  $\ell$ .

**Question 4) Généralisation :** à partir de la résolution du **Problème P**, montrer le :

**Lemme de prolongement des F.L.C., définies sur un hyperplan :** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$  e.v.n. quelconque et  $F$  un hyperplan de  $E$ , si  $\ell$  est une forme linéaire continue quelconque sur  $F$ , et qu'on note  $\|\ell\|$  sa norme d'opérateur, alors il existe une forme linéaire continue  $L$  définie sur  $E$  entier telle que  $\|L\| = \|\ell\|$ .

## II Théorème de prolongement des F.L.C. en dim. finie

**Question 5)** Le théorème :

**Théorème :** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un  $\mathbb{R}$ -e.v.n. de dimension finie. Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $\ell : F \rightarrow \mathbb{R}$  une forme linéaire (automatiquement continue). Alors il existe une forme linéaire  $L : E \rightarrow \mathbb{R}$  qui prolonge  $\ell$  i.e. telle que  $L|_F = \ell$  et de même norme :  $\|L\| = \|\ell\|$ .

Montrer ce théorème par récurrence sur  $\dim E - \dim F$  à l'aide du lemme démontré au § 1.4

**Remarque :** ce théorème s'étend, et c'est important, à des e.v.n. de dimension infinie, notamment à ceux qui admettent une partie *dénombrable dense*, nous y reviendrons après le cours sur la dénombrabilité.

**Question 6) Etude de l'unicité du prolongement :**

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un  $\mathbb{R}$ -e.v.n. de dimension finie. On note  $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$  l'e.v. des formes linéaires de  $E$ , appelé l'espace dual de  $E$  et on munit  $E^*$  de la norme d'opérateur :

$$\forall \ell \in E^*, \|\ell\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|\ell(x)\|.$$

On note  $S^*$  la sphère unité de  $E^*$  donc  $S^* = \{\varphi \in E^*, \|\varphi\| = 1\}$  et  $B^* = \{\varphi \in E^*, \|\varphi\| \leq 1\}$ .

a) On suppose que  $B^*$  est strictement convexe c'est-à-dire que :

$$\forall \phi_1, \phi_2 \in S^*, \phi_1 \neq \phi_2 \implies \frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2) \notin S^*.$$

Soient  $F$  un sous espace de  $E$ ,  $\phi$  une forme linéaire sur  $F$  de norme 1. Montrer qu'il existe une *unique* forme linéaire  $\psi$  sur  $E$ , de norme 1, et prolongeant  $\phi$ .

b) Réciproque : on suppose inversement qu'existent  $\phi_1$  et  $\phi_2$  appartenant à  $S^*$ , et vérifiant  $\phi_1 \neq \phi_2, \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \in S^*$ . Soit  $H = \text{Ker}(\phi_2 - \phi_1)$ .

i) Montrer que la restriction  $\phi$  de  $\phi_1$  à  $H$  est une forme linéaire de norme au plus 1, dont  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont deux prolongements distincts à  $E$ .

ii) On choisit une suite  $(y_n) \in E^{\mathbb{N}}$  où tous les  $y_n$  sont de norme 1 et  $\frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2)(y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$  : pourquoi une telle suite existe-t-elle ?

Montrer que :

$$\phi_1(y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \quad \text{et} \quad \phi_2(y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

iii) En fixant un vecteur  $u$  tel que  $(\phi_1 - \phi_2)(u) = 1$ , et à l'aide de la suite  $(x_n) \in H^{\mathbb{N}}$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = y_n + (\phi_2 - \phi_1)(y_n) \cdot u$$

montrer que  $\|\phi\| = 1$ .

c) Enoncer l'équivalence ainsi démontrée. Commenter l'exemple de la question 2 à la lumière de ce résultat.

**Question 7)** On admet le théorème suivant, dont l'idée de la démonstration est très analogue à celle du théorème de la question 5. Démontrer que ce théorème entraîne celui de la question 5, autrement dit que ce théorème est bien une généralisation du précédent.

**Théorème :** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un  $\mathbb{R}$ -e.v.n. de dimension finie et  $p : E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe sur  $E$ .

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $\ell : F \rightarrow \mathbb{R}$  une forme linéaire telle que :

$$\forall x \in F, \ell(x) \leq p(x)$$

Alors il existe une forme linéaire  $L : E \rightarrow \mathbb{R}$  qui prolonge  $\ell$  i.e. telle que  $L|_F = \ell$  et qui vérifie encore :

$$\forall x \in E, L(x) \leq p(x)$$

### III Version géométrique du même théorème

Dans ce paragraphe, on va démontrer :

**Théorème géométrique :** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -e.v.n. de dim. finie,  $C$  un ouvert convexe non vide de  $E$  et  $F$  un sous-espace affine de  $E$  tel que  $F \cap C = \emptyset$ . Alors il existe un hyperplan affine  $H$  de  $E$  contenant  $F$  et tel que  $H \cap C = \emptyset$ .

**Question 8)** Justifier qu'il suffit de démontrer le théorème dans le cas particulier où  $C$  contient  $0_E$  : on supposera donc cette condition réalisée.

**Question 9) Jauge d'un convexe absorbant**

Par déf. un sous-ensemble convexe  $A$  d'un  $\mathbb{R}$ -e.v.  $E$  est dit *absorbant* si, et seulement si, pour tout  $x \in E$ , il existe un  $t > 0$  tel que  $x/t \in A$ .

- a) Justifier qu'un ensemble convexe absorbant contient 0.
- b) Justifier que si  $A$  est un sous-ensemble d'un e.v.n.  $E$  tel que 0 est point intérieur à  $A$  alors  $A$  est absorbant.

Pour un ensemble convexe absorbant  $A$ , on définit sa *jauge de Minkowski*, comme l'application  $\mu_A : x \in E \mapsto \inf\{t > 0, x/t \in A\}$ .

- c) Montrer que  $t > \mu_A(x) \Rightarrow x/t \in A$ .
- d) Montrer que  $\mu_A$  vérifie l'I.T. :

$$\forall (x, y) \in E^2, \mu_A(x + y) \leq \mu_A(x) + \mu_A(y)$$

*Indication* – Soit  $(x, y) \in E^2$ . Soit  $\varepsilon > 0$  et  $t = \mu_A(x) + \varepsilon$  et  $s = \mu_A(y) + \varepsilon$ . Il s'agit de montrer que  $\frac{x+y}{s+t}$  est dans  $A$ , et pour cela, de l'écrire comme une combinaison convexe de  $x/s$  et  $y/t$ .

- e) Montrer que  $\mu_A$  est *positivement homogène* :  $\forall t \geq 0, \forall x \in A, \mu_A(tx) = t\mu_A(x)$ .
- f) On suppose qu'en outre  $A$  est symétrique par rapport à 0 : montrer qu'alors  $\mu_A(tx) = |t|\mu_A(x)$ .  
Donc pour  $A$  convexe, absorbant, symétrique par rapport à l'origine,  $\mu_A$  est une semi-norme.

Dans la suite on considère  $C$  un ouvert convexe non vide (comme dans le théorème ci-dessus) contenant  $0_E$  donc sa jauge  $\mu_C$  vérifie l'I.T. et est positivement homogène, en particulier  $\mu_C$  est une fonction convexe.

**Question 10)** On note donc  $p = \mu_C$ . Justifier que  $\forall x \in E, x \in C \Leftrightarrow p(x) < 1$ .

**Question 11)** On note  $F_0$  le s.e.v. engendré par le sous-espace affine  $F$ .

- a) Justifier que  $\dim F_0 = \dim F + 1$ .
- b) Justifier qu'il existe une unique forme linéaire  $\ell : F_0 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $F = \{x \in F_0, \ell(x) = 1\}$ .
- c) Justifier que  $\forall x \in F_0, \ell(x) \leq p(x)$ .

**Question 12)** En appliquant le théorème de la question 7, on a une forme linéaire  $L : E \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $L|_{F_0} = \ell$  et  $\forall x \in E, L(x) \leq p(x)$ .

Montrer que  $H := \{x \in E, L(x) = 1\}$  convient pour obtenir la conclusion du théorème géométrique annoncé.