$\boxed{\text{Sol. d'exercices pl. R1 et R2}}$

Exercice 8 (Pl. R1, une rédaction un peu différente de celle de Yohan, peut-être plus claire :)**.** En physique on appelle *filtre linéaire* un système décrit par une *application linéaire* $L : E \to E$ où $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ $e \mapsto s = L(e)$ ayant en outre la propriété suivante *d'invariance par translation dans le temps :* pour tout $\tau \in \mathbb{R}$ en notant $d_\tau \ : \ E \ \to E$, l'application de décalage temporel définie par $\forall \ e \in E$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $d_\tau(e)(t) = e(t+\tau)$, on a

$$L \circ d_\tau = d_\tau \circ L.$$

On note pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $e_\lambda \in E$, l'application définie par : $t \mapsto e^{\lambda t}$.

Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, e_λ est *vecteur propre* de L.

Remarque en physique, vous considérez des $\lambda = 2i\pi\omega$ avec $\omega \in \mathbb{R}$ correspondants aux signaux purement sinusoïdaux de pulsation ω.

Ainsi en particulier, pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, il existe un $H(\omega) \in \mathbb{C}$ tel que $Le_{2i\pi\omega} = H(\omega)e_{2i\pi\omega}$.

La fonction $\omega \mapsto H(\omega)$ s'appelle *fonction de transfert* du filtre.

Solution 8 Par propriété de l'exponentielle :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ \forall\, \tau \in \mathbb{R},\ d_\tau(e_\lambda)(t) \overset{def}{=} e_\lambda(t+\tau) = e_\lambda(t).e_\lambda(\tau),$$

ainsi :

$$d_\tau(e_\lambda) = e_\lambda(\tau).e_\lambda$$

En notant $s_\lambda = L(e_\lambda)$ on a donc :

$$(L \circ d_\tau)\ (e_\lambda) = e_\lambda(\tau)L(e_\lambda) = e_\lambda(\tau)s_\lambda.$$

La propriété $L \circ d_\tau = d_\tau \circ L.$ de l'énoncé donne donc ici :

$$\forall\, \tau \in \mathbb{R},\ \forall\, t \in \mathbb{R},\ e_\lambda(\tau)s_\lambda(t) = s_\lambda(t+\tau).$$

$\boxed{\text{Idée importante ici : échanger les rôles de } t \text{ et } \tau}$

L'égalité précédente se réécrit (variables muettes) :

$$\forall\, \tau \in \mathbb{R},\ \forall\, t \in \mathbb{R},\ e_\lambda(t)s_\lambda(\tau) = s_\lambda(t+\tau).$$

En particulier pour $\tau = 0$, on obtient :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ e_\lambda(t)s_\lambda(0) = s_\lambda(t).$$

Donc $\boxed{s_\lambda = H(\lambda)e_\lambda}$ où $H(\lambda) = s_\lambda(0)$ est la valeur propre associée au vecteur propre e_λ.

Remarque : pour bien faire du traitement du signal, on demande en plus à l'opérateur L d'être continu, pour que L traverse la décomposition de Fourier, nous y reviendront après la topo.

Exercice 4 (Planche R2)**.** Soient $(e_i)_{1\le i\le 2n+1}$ la base canonique de $M_{2n+1,1}(\mathbb{C})$ et A la matrice telle que $Ae_1 = e_1 + e_{2n+1}$ et $\forall\, k \ge 2$, $Ae_k = e_{k-1} + e_k$.

a) Calculer le polynôme caractéristique de A.

b) Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} comme un polynôme en A.

c) Déterminer les valeurs propres complexes de A et en déduire $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} \cos(\frac{k\pi}{2n+1})$.

Solution 4 a) On explicite $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et donc $\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}$

On calcule brutalement $\chi_A(\lambda)$ par développement par rapport à la première colonne : on obtient $\chi_A(\lambda) = (\lambda-1)^{2n+1} + (-1)^{2n+2}.(-1).(-1)^{2n}$. Finalement $\chi_A(\lambda) = (\lambda-1)^{2n+1} - 1$.

b) Pour montrer que A n'est pas inversible, ISMQ zéro n'est pas valeur propre de A, or par le calcul du a), $\chi_A(0) = -2$ d'où la conclusion.

Par le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = 0$. Donc $(A - I)^{2n+1} - I = 0$. En développant par la formule du binôme (comme A et I commutent) et en écrivant à part le terme d'indice $k = 0$, on obtient :

$$(A - I)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} A^k (-1)^{2n+1-k}.$$

Donc $\chi_A(A) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} A^k (-1)^{2n+1-k} = 2I$.

En divisant par 2, on obtient : $A.(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} A^{k-1} (-1)^{2n+1-k}) = I$.

Donc $A^{-1} = (\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} A^{k-1} (-1)^{2n+1-k})$.

c) $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \Leftrightarrow (\lambda - 1)^{2n+1} = 1 \Leftrightarrow \lambda - 1 = e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}} \Leftrightarrow \lambda = 1 + e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}$.

Donc $\boxed{\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \Leftrightarrow \lambda = 2e^{\frac{ik\pi}{2n+1}} \cos(\frac{k\pi}{2n+1}) \text{ avec } k \in [[0, 2n]]}$.

• Pour le *en déduire :* comme $\chi_A(0) = -2$, on sait que $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \lambda = 2$.

Donc $\prod_{k=0}^{2n} 2e^{\frac{ik\pi}{2n+1}} \cos(\frac{k\pi}{2n+1}) = 2$.

Donc $2^{2n+1} e^{\frac{i\pi}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} k} \prod_{k=0}^{2n} \cos(\frac{k\pi}{2n+1}) = 2 \quad (\dagger)$.

Mais le facteur $e^{\frac{i\pi}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} k}$ vaut $e^{in\pi} = (-1)^n$.

D'autre part dans le produit $\prod_{k=0}^{2n} \cos(\frac{k\pi}{2n+1})$ le terme d'indice $k = 0$ vaut 1, et les termes entre 1 et n et $n + 1$ et $2n$ sont opposés.

Donc $(\dagger)$ devient : $2^{2n+1}(-1)^n(-1)^n \prod_{k=1}^{n} \cos^2(\frac{k\pi}{2n+1}) = 2$.

Comme tous ces cosinus sont positifs, on en déduit que $\boxed{\prod_{k=1}^{n} \cos(\frac{k\pi}{2n+1}) = \frac{1}{2^n}}$.