

Solution d'exercices planche T2

Exercice 5. E un e.v.n. et $C \subset E$ un ensemble convexe. Montrer que :

- a) $\overline{C}$ est convexe.
- b) $\overset{\circ}{C}$ est convexe.
- c) Soit C un ensemble convexe d'intérieur non vide. Soit $x \in \overset{\circ}{C}$ et $y \in \overline{C}$. Montrer que $[x, y[\subset \overset{\circ}{C}$.
- d) **Bonus.** Dédurre du c) que si C est convexe d'intérieur non vide alors $\overline{C} = \overset{\circ}{C}$.

Solution 5 a) On veut montrer que si $(x, y) \in \overline{C}^2$ et $t \in [0, 1]$, on a $tx + (1-t)y \in \overline{C}$.

Mais par caractérisation séquentielle des points adhérents $x = \lim x_n$ et $y = \lim y_n$ avec $(x_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(y_n) \in C^{\mathbb{N}}$.

Puisque C est convexe, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $tx_n + (1-t)y_n \in C$.

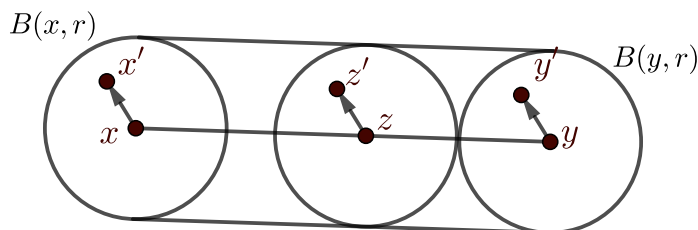
Or par continuité des sommes et produit $tx + (1-t)y = \lim tx_n + (1-t)y_n$.

Donc $tx + (1-t)y \in \overline{C}$.

b) **(M1) avec une « saucisse »** Si x et y sont dans $\overset{\circ}{C}$: on considère $r > 0$ tel que $B(x, r)$ et $B(y, r)$ sont dans $\overset{\circ}{C}$. Soit $z = (1-t)x + ty$ avec $t \in [0, 1]$, on sait que $z \in C$ par convexité.

Montrons alors que $B(z, r) \subset C$: soit $z' \in B(z, r)$ on écrit $z' = z + \rho$ avec $\|\rho\| < r$ et $z' = (1-t)(x + \rho) + t(y + \rho)$ avec $x' = x + \rho \in B(x, r)$ et $y' = y + \rho \in B(y, r)$ Donc x' et y' sont dans C et par convexité de C , on a bien $z' \in C$.

Ainsi on a montré que $B(z, r) \subset C$ et donc que $z \in \overset{\circ}{C}$.



Explication géométrique : ce qu'on vient de dire est que toute la « saucisse » d'âme $[x, y]$ et de rayon r est dans C . Cette « saucisse » est la réunion des segments $[u, u + (y-x)]$ où $y-x$ est le vecteur d'origine x et d'extrémité y et $u \in B(x, r)$. En particulier l'âme $[x, y]$ est donc dans l'intérieur de C .

(M2) plus abstraite car ensembliste mais efficace (cf. c) pour une illustration de l'efficacité du point de vue ensembliste) Dire que C est convexe signifie que pour tout $t \in [0, 1]$, $tC + (1-t)C \subset C$.

En particulier $t\overset{\circ}{C} + (1-t)\overset{\circ}{C} \subset C$. Mais pour tout $t \in [0, 1]$, $t\overset{\circ}{C} + (1-t)\overset{\circ}{C}$ est un ouvert comme somme de deux ouverts (exercice classique).

Donc $t\overset{\circ}{C} + (1-t)\overset{\circ}{C}$ est inclus dans le plus grand ouvert inclus dans C c'est-à-dire dans $\overset{\circ}{C}$.

L'inclusion $t\overset{\circ}{C} + (1-t)\overset{\circ}{C} \subset \overset{\circ}{C}$ étant vraie pour tout $t \in [0, 1]$, on a bien montré que $\overset{\circ}{C}$ est convexe.

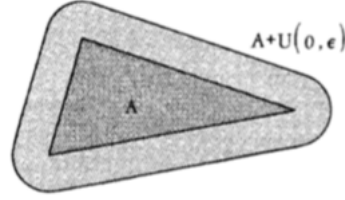
c) On va mélanger un peu les techniques des deux méthodes données au b).

(i) **Première étape : pour $x \in \overset{\circ}{C}$ et $y \in \overline{C}$ montrons que $[x, y[\subset \overset{\circ}{C}$.**

Remarquons que par déf. de l'adhérence, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $y' \in C$ tel que $\|y - y'\| < \varepsilon$

En notant $B = B_o(0, 1)$ la boule unité de E , ceci dit que pour tout $\varepsilon > 0$, $y \in C + \varepsilon B$ (l'épaississement de C : exemple de dessin d'un épaississement¹) :

1. extrait du livre Géométrie de M. Berger, magnifique livre (vraiment !) où pourtant la « preuve » en trois lignes de c) est fausse ...



Soit $z = (1-t)x + ty$ avec $t \in [0, 1[$ un élément de $[x, y[$.
Sachant que pour tout $\varepsilon > 0$, $y \in C + \varepsilon B$, on en déduit que :

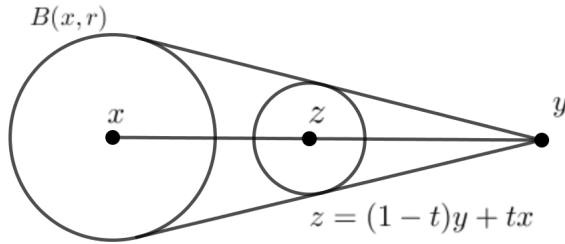
$$z \in (1-t)x + tC + t\varepsilon B = (1-t)\left(x + \frac{t\varepsilon}{1-t}B\right) + tC$$

Mais pour ε assez petit la boule $x + \frac{t\varepsilon}{1-t}B$ est incluse dans C puisque $x \in \overset{\circ}{C}$.

Donc pour $\varepsilon > 0$ assez petit $z \in (1-t)C + tC \subset C$.

D'où la fin de la première étape : on a bien montré que : $[x, y[\subset C$

2ème étape : avec la première étape et un raisonnement semblable au b) (M1)



On fixe une boule $B(x, r)$ incluse dans C .

On fixe un $z = (1-t)x + ty$ avec $t \in [0, 1[$.

Alors $z - y = t(x - y)$ et l'homothétie de centre y et de rapport t envoie $B(x, r)$ sur $B(z, tr)$.

Mais comme au b) (M1), tous les points z' de cette boule $B(z, tr)$ sont de la forme $z' = (1-t)x' + ty$ avec $x' \in B(x, r) \subset \overset{\circ}{C}$.

Donc par la première étape, tous ces points sont dans C . Donc $B(z, tr) \subset C$ et $z \in \overset{\circ}{C}$. $\square$

d) C'est une conséquence immédiate du c). En effet, l'inclusion $\overset{\circ}{C} \subset C$ entraîne déjà que $\overline{\overset{\circ}{C}} \subset \overline{C}$.

Pour l'inclusion inverse : soit $y \in \overline{C}$. On veut montrer que y est la limite d'une suite de points de $\overset{\circ}{C}$. Mais par le c) dès qu'on fixe un point $x \in \overset{\circ}{C}$ tout l'intervalle $]y, x]$ est formé de points intérieurs et donc la suite $y_n = (1 - 1/n)y + x/n$ convient !