

Exercice 1.

a)

$$0 \in \Pi_f \quad \Pi_f \subseteq \mathbb{R}$$

$$\text{Soit } (T_1, T_2) \in \Pi_f^2 \quad f(x + (T_1 + T_2))$$

Pour tout x dans $\mathbb{R}$

$$= f(x + T_1 + T_2) \underset{\substack{\uparrow \\ T_2 \in \Pi_f}}{=} f(x + T_1) \underset{\substack{\uparrow \\ T_1 \in \Pi_f}}{=} f(x) \quad \text{donc } T_1 + T_2 \text{ est dans } \Pi_f$$

$$f(x - T_1) \underset{\substack{\uparrow \\ T_1 \in \Pi_f}}{=} f(x - T_1 + T_1) = f(x) \quad \text{donc } -T_1 \text{ est dans } \Pi_f.$$

Π_f est bien un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$

b)

On va utiliser la caractérisation

~~Par la caractérisation séquentielle des fermés :~~

$$\text{Soit } (T_n) \in \Pi_f^{\mathbb{N}} \quad \text{tq } T_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} T \in \mathbb{R}$$

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} \quad f(x + T_n) \stackrel{①}{=} f(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Donc comme } f \text{ est continue } f(x + T_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x + T)$$

Donc en passant à la limite l'égalité ① on obtient

$$f(x + T) = f(x)$$

$$\boxed{T \in \Pi_f}$$

Donc Π_f est fermé par la caractérisation séquentielle des fermés.

c)

$$\text{Soit } T \in \mathbb{Q}$$

$$\text{Si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad x + T \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

$$\text{Si } x \in \mathbb{Q} \quad x + T \in \mathbb{Q}$$

Donc $1_Q(x+T) = 1_Q(x)$ pour tout x réel.

Ainsi $\boxed{Q \subseteq \Pi_{1_Q}} \quad (*)$

Mieux on a déjà l'égalité ici

car si x est rationnel et T irrationnel, $x+T$ est irrationnel

donc $1_Q(x)$ sera différent de $1_Q(x+T)$. Tu le dis en (**)

mais ce serait plus

On a donc $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$

Comme Q est dense dans $\mathbb{R}$ on sait qu'il existe $(T_n) \in Q^\mathbb{N}$ tq $T_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} T$

clair de dire ici

$\mathbb{P} = Q$

et Q n'est pas fermé.

Selon $(*)$ $(T_n) \in (\Pi_{1_Q})^\mathbb{N}$

Or $\boxed{T \notin \Pi_{1_Q}}$

En effet si $x \in Q$ $x+T \in \mathbb{R} \setminus Q$

(**)

Donc $(f(x+T) = 0) \neq (f(x) = 1)$

Π_{1_Q} n'est pas fermé

d)

f est périodique continue donc $\Pi_f \neq \{0\}$
et Π_f fermé car f continue.

On pose $\alpha = \inf(\Pi_f \cap \mathbb{R}^{+*})$

• si $\alpha > 0$ Alors $\alpha \in \Pi_f$ (cf exo 6)

Donc α est la plus petite période strict positive de f (par définition)

• si $\alpha = 0$

Alors Πf est dense dans $\mathbb{R}$

Soit $T \in \mathbb{R}$ il existe $(T_n) \in (\Pi f)^{\mathbb{N}}$ tq $T_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} T$

Comme Πf est fermé $\boxed{T \in \Pi f}$

Ainsi $\boxed{\Pi f = \mathbb{R}}$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ $f(x) = f(\underbrace{x-y+y}_{\in \mathbb{R}}) = f(y)$

f est constante, donc f n'est pas périodique

Aboude