Solutions d'exercices planche S1

Exercice 9 (Série convergeant vite : Mines-Ponts 2021)**.**

Soit $f\ :\ [1,+\infty[\to\mathbb{R}_*^+$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\dfrac{f'(x)}{f(x)}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}-\infty$.

a) Montrer que la série $\sum f(n)$ converge.

b) Donner un équivalent du reste $R_n=\sum\limits_{k\geq n+1}f(k)$ quand $n\to+\infty$.

Solution 9 a) Soit $A<0$ fixé.

Par déf. de la limite, il existe un $B>0$ tel que pour tout $x\geq B$, $f'(x)/f(x)<A$ et donc, par intégration de cette inégalité :

$$\forall\, x\geq B, \ln(f(x))-\ln(f(B))\leq A(x-B).$$

Donc, en prenant l'exponentielle de l'inégalité précédente :

$$\forall\, x\ \geq B, 0\leq f(x)\leq f(B)e^{A(x-B)}.$$

Comme $A<0$, on a donc majoré pour tout $n\geq B$, $f(n)$ par $f(B)e^{A(n-B)}$ t.g. d'une série CV. Donc (série à termes positifs, thm. de comparaison), $\sum f(n)$ CV.

b) On utilise la majoration qu'on vient de prouver au a) mais en changeant les bornes : on fixe toujours $A<0$, on a toujours un $B>0$ tel que :

$$\forall\, x\geq B,\ f'(x)/f(x)<A\quad(*),$$

mais cette fois on considère $n>B$ et on intègre $(*)$ entre n et $n+p$ on obtient :

$$\ln(f(n+p))-\ln(f(n))\leq Ap$$

et donc :

$$f(n+p)\leq f(n)e^{Ap}$$

L'avantage de ces inégalité, c'est maintenant on peut les sommer pour $p=1,\dots,+\infty$:

$$R_n:=\sum_{p=1}^{+\infty}f(n+p)\leq f(n)\sum_{p=1}^{+\infty}e^{Ap}=f(n)\frac{e^A}{1-e^A}$$

Comme $e^A\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow}0$, on a montré que :

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\, n_0\in\mathbb{N},\ 0\leq R_n\leq\varepsilon f(n)=\varepsilon u_n$$

Autrement dit, on a montré que $R_n=o(u_n)$.

Mais alors comme $R_{n-1}=u_n+R_n$, cela montre que

$$\boxed{R_{n-1}\underset{n\to+\infty}{\sim}u_n}$$

N.B. On est dans une situation typique de convergence très rapide en $O(e^{-An})$ où l'équivalent du reste est donné par son premier terme.

Exercice 10 (CCINP MP 2017)**.** Pour tout $n\geq 2$, on pose $U_n=1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

L'énoncé faisait admettre que $|\ln(U_{2k+1})|-|\ln(U_{2k})|=-\ln(1+\dfrac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k}-1}{\sqrt{2k}\sqrt{2k+1}})$. Vérifiez-le.

a) La série $\sum\ln(U_n)$ est-elle à signe alternée ?

b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\leq 1/2$. En déduire que :

$$\forall\, k\in\mathbb{N}^*,\ |\ln(U_{2k+1})|-|\ln(U_{2k})|>0$$

c) La série $\sum \ln(U_n)$ vérifie-t-elle les conditions du théorème de convergence des séries alternées ?

d) Etudier la convergence de $\sum \ln(U_n)$ à l'aide d'un D.L. à l'ordre 3 de $\ln(1+x)$.

Solution 10 N.B. Vérification de l'égalité admise : compte tenu des signes de $\ln(U_{2k+1}) < 0$ et $\ln(U_{2k} > 0)$, on a :

$$\begin{aligned}
|\ln(U_{2k+1})| - |\ln(U_{2k})| &= \ln(\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2k+1}}}) + \ln(\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{2k}}}) \\
&= \ln(\frac{\sqrt{2k+1}}{\sqrt{2k+1}-1}) + \ln(\frac{\sqrt{2k}}{1+\sqrt{2k}}) \\
&= -\ln(\frac{(\sqrt{2k+1}-1)(\sqrt{2k}+1)}{\sqrt{2k+1}\sqrt{2k}}) \\
&= -\ln(\frac{\sqrt{2k+1}\sqrt{2k}+\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k}-1}{\sqrt{2k+1}\sqrt{2k}}) \\
&= = -\ln(1+\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k}-1}{\sqrt{2k}\sqrt{2k+1}}).
\end{aligned}$$

a) La suite est bien à signe alerné car pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $U_{2k} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2k}} > 1$ et $\ln(U_{2k}) > 0$ et $U_{2k+1} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2k+1}} < 1$ donc $\ln(U_{2k+1}) < 0$.

b) Pour l'inégalité demandée, avec l'expression conjuguée :

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2}$$

puisque au dénominateur $\sqrt{n} \geq 1$ et $\sqrt{n+1} \geq 1$. Dans l'égalité admise, on a alors $\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k} - 1 \leq 1/2 - 1 = -1/2 < 0$.

Ceci montre que $\ln(1+\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k}-1}{\sqrt{2k}\sqrt{2k+1}}) < 0$ et donc par l'égalité admise :

$$|\ln(U_{2k+1})| - |\ln(U_{2k}) > 0$$

c) Le résultat du b) montre que la suite $|\ln(U_n)|$ n'est PAS décroissante. Donc le T.S.A. ne s'applique pas.

d) Avec $\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 + o(x^3)$, on a

$$\ln(U_n) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o(\frac{1}{n\sqrt{n}}). \quad (*)$$

Les deux derniers termes peuvent d'ailleurs s'écrire $O(\frac{1}{n^{3/2}}$ ce qui est un O d'un terme général de série ACV donc ACV.

Dans la somme $(*)$, dans le membre de droite, on a alors trois termes $(-1)^n/\sqrt{n}$ qui est TGSC par T.S.A., le terme en $O()$ qui est TGSC et un seul terme de série DIV le $1/2n$.

Ceci suffit pour montrer que $\sum \ln(U_n)$ DIV.

Exercice 11. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \prod_{k=1}^{n} \big(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\big)$. Etudier la suite (u_n) quand $n \to +\infty$. b)Soit $\alpha > 0$ et $k \in \mathbb{R}^*$. Etudier la nature de la série de t.g. $u_n = \sin(\frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \frac{k}{n^{5\alpha}})$.

Solution 11 a) a) $\ln(u_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln\big(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\big)$.

On ne peut pas utiliser d'équivalent (série à termes de signes non constant) donc on fait un D.L.

Ainsi : $\ln\left(1+\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)=\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}-\frac{1}{2k}+\frac{(-1)^{k-1}}{3k^{3/2}}+o(\frac{1}{k^{3/2}})$.

Or $a_n=\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$ est T.G. d'une serie CV par T.S.A. Par ailleurs $b_n=\frac{(-1)^{k-1}}{3k^{3/2}}+o(\frac{1}{k^{3/2}})=O(\frac{1}{k^{3/2}})$ est T.G. d'une série ACV par comparaison aux séries de Riemann.

En revanche la série harmonique est divergente, donc $\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}-\infty$.

Donc $\ln(u_n)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}-\infty$ donc $u_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

b) *L'essentiel : pourquoi faut-il faire un D.L. à l'ordre* 5 *du sinus ? Pour tenir compte du terme en* $1/n^{5\alpha}$ *dans le D.L.*

Ainsi, avec un D.L. $u_n=\frac{(-1)^n}{n^\alpha}+\frac{k}{n^{5\alpha}}-\frac{(-1)^{3n}}{6n^{3\alpha}}+\frac{(-1)^{5n}}{120n^{5\alpha}}+o(\frac{1}{n^{5\alpha}})$.

On peut décomposer : $u_n=a_n+b_n$ avec $a_n=\frac{(-1)^n}{n^\alpha}+-\frac{(-1)^n}{6n^{3\alpha}}+\frac{(-1)^n}{120n^{5\alpha}}$ et $b_n=\frac{k}{n^{5\alpha}}+o(\frac{1}{n^{5\alpha}})$.

La série de t.g. (a_n) est convergente comme somme de série CV par T.S.A.

Comme $b_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{k}{n^{5\alpha}}$, la série de t.g. (b_n) est à termes de signes constant A.P.C.R. (*argument important*).

Ainsi par théorème sur les équivalent $\sum b_n$ et $\sum\frac{k}{n^{5\alpha}}$ ont même nature.

Donc $\sum b_n$ converge si, et seulement si, $5\alpha>1$, ssi $\alpha>1/5$.

Par théorème d'addition, comme $\sum a_n$ CV, on a $\sum u_n$ CV ssi $\alpha>1/5$. $\square$