

Appendice : suites récurrentes linéaires d'ordre deux

Point de départ : En pratique, on nous donne une suite réc. linéaire concrète, par exemple $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n$. On cherche une écriture explicite pour (u_n) .

Parfois en maths, une bonne façon de résoudre une question est de poser une question plus générale : ici, on ne va pas regarder la suite (u_n) toute seule, mais toutes les suites vérifiant la même relation de réc. En outre, même pour comprendre les suites réelles, le passage dans $\mathbb{C}$ va être utile pour le cas $\Delta < 0$ comme ici.

Ce qui suit s'applique au cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et $V = \{(v_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = av_{n+1} + bv_n\}$. On cherche une forme explicite pour tous les éléments de V .

a) V est un $\mathbb{K}$ -e.v. (s.e.v. de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$), de dim. deux, car on a un isomorphisme de V dans $\mathbb{K}^2$, $u \mapsto (u_0, u_1)$.

b) On cherche les éléments de V qui sont de la forme (q^n) avec $q \in \mathbb{K}^*$.

Ceci conduit à l'E.C. : $q^2 = aq + b$. On a donc trois cas possibles pour les solutions.

c) Premier cas : l'E.C. admet deux solutions distinctes q_1 et q_2 , alors $\alpha = (q_1^n)$ et $\beta = (q_2^n)$ sont deux suites $\mathbb{K}$ -indépendantes, donc forment une base de V .

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ c'est le cas $\Delta > 0$, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, c'est le cas $\Delta \neq 0$.

Alors : $\forall v \in V, \exists ! (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall n \in \mathbb{N}, v_n = \lambda q_1^n + \mu q_2^n$.

d) Deuxième cas : $\Delta = 0$. On note q la sol. double de l'E.C. On définit $\alpha = (q^n)$ et $\beta = (nq^n)$. On vérifie que $\beta \in V$, et que (α, β) est une base de V .

Alors : $\forall v \in V, \exists ! (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall n \in \mathbb{N}, v_n = \lambda q^n + \mu n q^n$.

e) Troisième cas si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\Delta < 0$: l'E.C. n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$.

Dans ce cas, on va distinguer $V_{\mathbb{R}} = \{(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = av_{n+1} + bv_n\}$ et $V_{\mathbb{C}} = \{(v_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = av_{n+1} + bv_n\}$.

Dans $\mathbb{C}$, on a deux solutions $q_1 = re^{i\theta}$ et $q_2 = re^{-i\theta}$ de l'E.C. dans $\mathbb{C}$ (conjuguées car l'équation est à coeff. réels). Donc le premier cas (c), s'applique à $V_{\mathbb{C}}$ i.e. $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}(q_1^n) \oplus \mathbb{C}(q_2^n)$.

f) Pour trouver une base de $V_{\mathbb{R}}$ formée de suites explicites, il suffit de remarquer que les deux suites $(\operatorname{Re}(q_1^n))$ et $(\operatorname{Im}(q_1^n))$ sont dans $V_{\mathbb{R}}$ et sont indépendantes. Donc dans le cas $\Delta < 0$ tout élément de $V_{\mathbb{R}}$ s'écrit de manière unique $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \lambda r^n \cos(n\theta) + \mu r^n \sin(n\theta)$.