

Exercice 20 (Exercice de cours : démo très guidée du théorème des noyaux pour deux polynômes). Soit E un K -e.v. quelconque et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $P \in K[X]$ qui se décompose en $P = P_1.P_2$ avec $P_1 \wedge P_2 = 1$.

- 1) a) A l'aide de l'identité de Bézout montrer que $\ker P_1(u) \cap \ker P_2(u) = \{0\}$.
- b) Soit $F = \ker P(u)$ et soit $x \in F$. Avec la même identité de Bézout obtenir une décomposition $x = x_1 + x_2$ avec $x_i \in \ker P_i(u)$.
- c) Ainsi avec le a) et le b), conclure que $\ker P(u) = \ker P_1(u) \oplus \ker P_2(u)$.

N.B. On vient de démontrer le cas $r = 2$ du théorème des noyaux du programme qui dit que si $P_1, \dots, P_r$ sont deux à deux premiers entre eux et $P = \prod_{i=1}^r P_i$ alors

$$\ker(P(u)) = \oplus_{i=1}^r \ker P_i(u)$$

La question 2) qui suit fournit deux précisions supplémentaires, le 2) b) pouvant être très utile mais H.P. donc à rejustifier.

- 2) On suppose désormais que $F = E$ autrement dit que P est un polynôme annulateur de u . (Noter qu'on pouvait se ramener à ce cas-là au a) en considérant l'endomorphisme induit u_F)
 - a) Montrer qu'on a aussi $\text{Im } P_1(u) = \ker P_2(u)$ et $\text{Im } P_2(u) = \ker P_1(u)$.
 - b) Montrer que les projecteurs associés à la décomposition $E = \ker P_1(u) \oplus \ker P_2(u)$ sont dans $\mathbb{K}[u]$.

Solution 20 1) Comme $P_1 \wedge P_2 = 1$, par Bézout, on a deux polynômes U_1 et U_2 tels que

$$P_1 U_1 + P_2 U_2 = 1 \quad (0)$$

et donc en évaluant en u :

$$P_1(u) \circ U_1(u) + P_2(u) \circ U_2(u) = \text{id}_E \quad (1)$$

En permutant les facteurs dans (0) et en évaluant en u :

$$U_1(u) \circ P_1(u) + U_2(u) \circ P_2(u) = \text{id}_E \quad (2)$$

a) si $x \in \ker P_1(u) \cap \ker P_2(u)$ on aura

$$U_1(u) \circ P_1(u)(x) + U_2(u) \circ P_2(u)(x) = 0$$

et donc avec l'équation (2), on aura $\text{id}(x) = 0$ donc $x = 0$, ce qui prouve déjà :

$$\ker P_1(u) \cap \ker P_2(u) = \{0\} \quad (3).$$

b) Soit $x \in F$. Avec (1), $x = \text{id}(x) = P_1(u)(z_1) + P_2(u)(z_2)$ en posant $z_1 = U_1(u)(x)$ et $z_2 = U_2(u)(x)$.

Rappel : si $Q_1, Q_2 \in \mathbb{K}[X]$, $\ker Q_1(u)$ est stable par u et donc aussi par $Q_2(u)$.

Ici pour $F = \ker(P_1.P_2)(u)$ on sait donc que F est stable par $U_1(u)$ et $U_2(u)$ donc que z_1 et z_2 sont encore dans F .

Mais alors en notant $x_1 = P_2(u)(z_2)$ et $x_2 = P_1(u)(z_1)$, on a $P_1(u)(x_1) = P_1(u) \circ P_2(u)(z_2) = 0$ donc $x_1 \in \ker(P_1(u))$ et de même $x_2 \in \ker(P_2(u))$.

Ainsi pour tout $x \in F$, $x \in \ker P_1(u) + \ker P_2(u)$ donc $\ker(P_1.P_2)(u) \subset \ker(P_1(u)) + \ker(P_2(u))$.

c) On a enfin les inclusions évidentes $\ker(P_1(u)) \subset \ker(P_2(u) \circ P_1(u)) = F$ et de même avec $\ker(P_2(u)) \subset F$ donc $\ker(P_1(u)) + \ker(P_2(u)) \subset F$.

Avec le a), le b) et cette inclusion évidente, on a bien le résultat : $\ker P(u) = \ker P_1(u) \oplus \ker P_2(u)$.

- 2) a) Si on reprend les notations de la preuve du 1) b) (avec $F = E$), par déf. $x_1 \in \text{Im } P_2(u)$ et $x_2 \in \text{Im } P_1(u)$ donc tout $x \in E$ s'écrit :

$$x = x_1 + x_2 \in \text{Im } P_2(u) + \text{Im } P_1(u)$$

donc :

$$E = \text{Im } P_1(u) + \text{Im } P_2(u) \quad (4)$$

Comme ici $P_1(u) \circ P_2(u) = P(u) = 0$, on a aussi

$$\text{Im } P_2(u) \subset \ker(P_1(u)) \quad \text{et} \quad \text{Im } P_1(u) \subset \ker(P_2(u)) \quad (5)$$

Lemme : Si E est un K -e.v. quelconque et F_1, F_2, E_1, E_2 sont des s.e.v. de E tels que $F_2 \subset E_1$, $F_1 \subset E_2$, $F_1 + F_2 = E$ et $E_1 \oplus E_2 = E$ alors $E_1 = F_2$ et $E_2 = F_1$.

Application du lemme ici : avec $E_i = \ker(P_i(u))$ et $F_i = \text{Im}(P_i(u))$ on conclut que bien que $\ker(P_1(u)) = \text{Im}(P_2(u))$ et inversement. $\square$

Démonstration du lemme :

Sans argument de dimension (en donc y compris dans un e.v de dim. infinie) : soit $x \in E_1$, comme $E = F_1 + F_2$, on a $x = y_1 + y_2$ avec $y_i \in F_i$. Mais alors $y_1 \in E_2$ et $y_1 \in E_1$.

Par *unicité* de la décomposition selon $E = E_1 \oplus E_2$, en identifiant les deux décompositions

$$x + 0 = y_2 + y_1$$

on a $x = y_2$ et $y_1 = 0$. Donc $x \in F_2$, ce qui montre l'inclusion manquante. $\square$

b) On repart de l'égalité $\text{id} = P_1(u) \circ U_1(u) + P_2(u) \circ U_2(u)$.

Soit $x \in E$, l'égalité précédente évaluée en x donne

$$x = x_1 + x_2$$

avec $x_1 \in \text{Im } P_1(u) \circ U_1(u) \subset \text{Im } P_1(u)$ et $x_2 \in \text{Im } P_2(u) \circ U_2(u) \subset \text{Im } P_2(u)$.

Donc en notant $p_1 = P_1(u) \circ U_1(u)$ (*) et $p_2 = P_2(u) \circ U_2(u)$ (**) on a

$$\forall x \in E, x = p_1(x) + p_2(x) \quad \text{avec} \quad p_1(x) \in \text{Im } P_1(u) = \ker P_2(u) \quad \text{et} \quad p_2(x) \in \text{Im } P_2(u) = \ker P_1(u).$$

Par *unicité* de la décomposition de chaque x selon $E = \ker P_1(u) \oplus \ker P_2(u)$, les deux applications p_1 et p_2 sont donc les projecteurs associés à cette décomposition. Par leur déf. (cf. (*) et (**)), ils sont bien dans $\mathbb{K}[u]$.

Remarque sur la généralisation à $P_1 \dots P_r(u)$ avec $r \geq 3$ et $P_1, \dots, P_r$ deux à deux premiers entre eux, des trois résultats de l'exercice : Le 1) permet directement de faire une récurrence.

2) a) Attention : c'est plus compliqué, le résultat devient que $\ker P_i(u) = \text{Im } \prod_{j \neq i} P_j(u)$ (et inversement $\text{Im } P_i(u) = \ker \prod_{j \neq i} P_j(u)$).

Le 2)b) se prouve par contre à l'identique.