

MP2 DS 8, solutions

Exercice 1.

a) Question de cours pur sucre.

(i) Par déf. f admet un maximum local en a ssi il existe V un voisinage de a dans U tel que $\forall x \in V, f(x) \leq f(a)$.

De même pour minimum local en renversant la dernière inégalité.

Erreurs vues :

- mettre des valeurs absolues : dans ce cas on parle des max. et min. de $|f|$, pas de f .
- déf. les extrema par l'annulation de la dérivée/différentielle : horrible, ni nécessaire (fonction non dérivable, point non intérieur), ni suffisant $x \mapsto x^3$
- déf. f admet un extremum local en a par : $\exists V \in \mathcal{V}(a), \forall x \in V, f(x) \leq f(a)$ ou $f(x) \geq f(a)$, propriété stupide car la condition $f(x) \geq a$ ou $f(x) \leq a$ est toujours vraie! Il faudrait dire ; $(\exists V \in \mathcal{V}(a), \forall x \in V, f(x) \leq f(a))$ ou $(\exists V \in \mathcal{V}(a), \forall x \in V, f(x) \geq f(a))$,

(ii) Soit v un vecteur quelconque. Comme U est ouvert il existe un $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t \in]-\varepsilon, +\varepsilon[, a + tv \in U$.

Soit $\varphi :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f(a + tv)$.

Par déf. φ admet un extremum local en 0 donc $\varphi'(0) = 0$. Or $\varphi'(0) = df(a).v$.

Ainsi pour tout $v \in E, df(a).v = 0$ donc $df(a) = 0$.

b) (i) Comme $df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, on sait que $df(a) = 0$ ssi $df(a).e_1 = 0$ et $df(a).e_2 = 0$ pour (e_1, e_2) la base canonique de \mathbb{R}^2 .

Or $df(a).e_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(a)$ et $df(a).e_2 = \frac{\partial f}{\partial y}(a)$.

D'où l'équivalence annoncée.

(ii) Par déf. de f , on sait que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x(x^2 + y^2) + 2x(x^2 + y^2 - 8) = 2x(2x^2 + 2y^2 - 8) = 4x(x^2 + y^2 - 4)$.

De même $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y(x^2 + y^2) + 2y(x^2 + y^2 - 8) = 2y(2x^2 + 2y^2 - 8) = 4y(x^2 + y^2 - 4)$.

Ainsi $a = (x, y)$ est un point critique de f si, et seulement si, $\begin{cases} x(x^2 + y^2 - 4) = 0 \\ y(x^2 + y^2 - 4) = 0 \end{cases}$

Ceci équivaut à $(x, y) = (0, 0)$ ou $x^2 + y^2 = 4$. Donc

l'ensemble des points critiques f est la réunion $\{0\} \cup \Gamma$

où Γ est le cercle de centre 0 et de rayon 2.

(iii) Par déf. $f(x, y) = (r^2 - 8).r^2$. Donc $f(x, y) \geq 0 \Leftrightarrow r^2 \geq 8 \Leftrightarrow r \geq 2\sqrt{2}$.

Quel intérêt à cette remarque ici? Comme $f(0, 0) = 0$ et $\forall (x, y) \in B_f(0, 2\sqrt{2}), f(x, y) \leq 0$ on sait que :

f admet un max. local en 0

En revanche, on ne peut pas seulement avec ce signe savoir de qui se passe sur le cercle Γ . Pour cela, on étudie plutôt les *variations* de la fonction φ définie par $\varphi(r) = (r^2 - 8).r^2$.

On a $\varphi'(r) = 2r(r^2 - 8) + 2r.r^2 = 4r^3 - 16r = 4r(r^2 - 4)$.

On en déduit que $r \mapsto \varphi(r)$ est décroissante sur $[0, 2]$ puis croissante sur $[2, +\infty[$ donc admet un min global pour $r = 2$. Donc

f admet un min global sur \mathbb{R}^2 atteint en chaque point du cercle Γ .

Ainsi tous les points critiques de f sont ici des points où l'on atteint un extremum local.

(iv) On a déjà dit au (iii) que tous les points de Γ donnent le minimum global de f .

En revanche en 0 on a seulement un max. local non global car $f(x, 0) = x^2 \cdot (x^2 - 8) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$
 donc f n'admet pas de maximum global sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 2. 1) a) (i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\mathbb{P}(X = n) - \mathbb{P}(Y = n)| \leq \mathbb{P}(X = n) + \mathbb{P}(Y = n)$.

Or les séries de termes généraux $(\mathbb{P}(X = n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\mathbb{P}(Y = n))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent avec pour somme 1.

Donc par majoration pour les séries à termes positifs, $\sum |\mathbb{P}(X = n) - \mathbb{P}(Y = n)|$ converge et même $d(X, Y) \leq 1$.

1) a) (ii) d vérifie l'I.T. et la symétrie, mais bien sûr deux v.a. peuvent avoir la même loi en étant indépendantes par exemple donc non égales :

Ne pas confondre une v.a. et sa loi.

Donc d ne vérifie pas la propriété (D1), ce n'est pas une vraie distance.

b)(i) Comme $A \sqcup A^c = \mathbb{N}$, on peut sommer par paquet la famille sommable de réels positifs $|\mathbb{P}(X = n) - \mathbb{P}(Y = n)|_{n \in \mathbb{N}}$ et

$$\begin{aligned} 2d(X, Y) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} |\mathbb{P}(X = n) - \mathbb{P}(Y = n)| \quad \text{par déf} \\ &= \sum_{n \in A} |\mathbb{P}(X = n) - \mathbb{P}(Y = n)| + \sum_{n \in A^c} |\mathbb{P}(X = n) - \mathbb{P}(Y = n)| \quad \text{par sommation par paquets} \\ &= \sum_{n \in A} \mathbb{P}(X = n) - \mathbb{P}(Y = n) + \sum_{n \in A^c} \mathbb{P}(Y = n) - \mathbb{P}(X = n) \quad \text{par déf de } A \\ &= \mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A) + \mathbb{P}(Y \in A^c) - \mathbb{P}(X \in A^c) \\ &= \mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A) + 1 - \mathbb{P}(Y \in A) - (1 - \mathbb{P}(X \in A)) \\ &= 2\mathbb{P}(X \in A) - 2\mathbb{P}(Y \in A) \end{aligned}$$

d'où le résultat voulu.

(ii) Pour B quelconque par exemple si $\mathbb{P}(X \in B) - \mathbb{P}(Y \in B) \geq 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \in B) - \mathbb{P}(Y \in B) &= \mathbb{P}(X \in B \cap A) + \mathbb{P}(X \in B \cap A^c) - \mathbb{P}(Y \in B \cap A) - \mathbb{P}(Y \in B \cap A^c) \\ &= \sum_{k \in B \cap A} \mathbb{P}(X = k) + \sum_{k \in B \cap A^c} \mathbb{P}(X = k) - \sum_{k \in B \cap A} \mathbb{P}(Y = k) - \sum_{k \in B \cap A^c} \mathbb{P}(Y = k) \\ &= \sum_{k \in B \cap A} \mathbb{P}(X = k) - \mathbb{P}(Y = k) + \underbrace{\sum_{k \in B \cap A^c} \mathbb{P}(X = k) - \mathbb{P}(Y = k)}_{\leq 0 \text{ par déf. de } A^c} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \in B) - \mathbb{P}(Y \in B) &\leq \sum_{k \in B \cap A} \mathbb{P}(X = k) - \mathbb{P}(Y = k) \\ &\leq \sum_{k \in A} \mathbb{P}(X = k) - \mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A) \end{aligned}$$

Donc par le résultat du (i), on a bien dans ce cas $0 \leq \mathbb{P}(X \in B) - \mathbb{P}(Y \in B) \leq d(X, Y)$.

Remarque : Avec (i) et (ii) on a aussi $d(X, Y) = \sup_{B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})} |\mathbb{P}(X \in B) - \mathbb{P}(Y \in B)|$, ce sup étant atteint pour l'ensemble A ci-dessus.

c) A l'aide de la question précédente, il suffit de montrer que pour tout $B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$,

$$|\mathbb{P}(X \in B) - \mathbb{P}(Y \in B)| \leq \mathbb{P}(X \neq Y)$$

Par symétrie de X et Y dans les hypothèses, il suffit de montrer sans v.abs. que si $0 \leq \mathbb{P}(X \in B) - \mathbb{P}(Y \in B)$ alors

$$\mathbb{P}(X \in B) - \mathbb{P}(Y \in B) \leq \mathbb{P}(X \neq Y),$$

ce qui s'écrit encore

$$\mathbb{P}(X \in B) \leq \mathbb{P}(Y \in B) + \mathbb{P}(X \neq Y)$$

Pour cela il suffit d'avoir l'inclusion ensembliste :

$$\{X \in B\} \subset \{Y \in B\} \cup \{X \neq Y\}$$

qui est triviale car si $X(\omega) \in B$ alors ou bien $X(\omega) \neq Y(\omega)$ ou bien $X(\omega) = Y(\omega)$ et donc $Y(\omega) \in B$.

N.B Bien sûr, on peut faire ce raisonnement aussi seulement pour $B = A$ si on veut.

2) a) L'inégalité à démontrer s'écrit encore $1 - x \leq e^{-x}$. Cette inégalité est en fait vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, puisque par convexité de \exp et comparaison avec sa tangente en 0 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 1 + x \leq e^x$$

On peut bien sûr aussi faire l'étude de la fonction différence.

b) Par déf. $\mathbb{P}(X_i = 0) = \mathbb{P}((U_i = 0) \cap (Y_i = 0)) = \mathbb{P}(U_i = 0) \cdot \mathbb{P}(Y_i = 0)$ par indépendance.

Par déf. de ces deux lois, $\mathbb{P}(X_i = 0) = e^{\lambda/n} (1 - \lambda/n) e^{-\lambda/n} = (1 - \lambda/n)$. Donc $X_i \sim \mathcal{B}(\lambda/n)$.

c) Comme pour chaque $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $X_i = f(U_i, Y_i)$ où $f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y = 0, \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$, et comme

$(Y_1, \dots, Y_n, U_1, \dots, U_n)$ sont mutuellement indépendantes, on conclut par lemme des coalitions que X_1, \dots, X_n sont indépendantes.

Ainsi $X = X_1 + \dots + X_n$ vérifie $X \sim \mathcal{B}(n, \lambda/n)$ comme somme de v.a. de Bernoulli $\mathcal{B}(\lambda/n)$ mutuellement indépendantes.

d) Exercice standard (par exemple avec les fonctions génératrices l'exp. est fait pour cela) :

On sait que pour une v.a. Y_i suivant $\mathcal{P}(\lambda_i)$, on a $G_{Y_i}(t) = e^{\lambda_i(t-1)}$.

Par indépendance mutuelle, on sait que $G_{Y_1 + \dots + Y_n}(t) = \prod_{i=1}^n G_{Y_i}(t) = \exp(\sum_{i=1}^n (\lambda_i(t-1)))$ donc

$Y_1 + \dots + Y_n$ suit $\mathcal{P}(\sum_{i=1}^n \lambda_i)$.

Donc ici avec $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_i = \frac{\lambda}{n}$ on conclut que $\boxed{Y \sim \mathcal{P}(\lambda)}$.

d) $\{X_i = Y_i\} = \{X_i = Y_i = 0\} \cup \{X_i = Y_i = 1\}$. Mais par déf. de X_i , $X_i = Y_i = 0$ équivaut à $Y_i = U_i = 0$ et par indépendance $\mathbb{P}(Y_i = U_i = 0) = \mathbb{P}(Y_i = 0) \cdot \mathbb{P}(U_i = 0) = (1 - \frac{\lambda}{n})$

D'autre part $\mathbb{P}(X_i = Y_i = 1) = \mathbb{P}(Y_i = 1) = \frac{\lambda}{n} e^{-\frac{\lambda}{n}}$

Au total $\mathbb{P}(X_i = Y_i) = (1 - \frac{\lambda}{n}) + \frac{\lambda}{n} e^{-\frac{\lambda}{n}}$ et donc $\mathbb{P}(X_i \neq Y_i) = \frac{\lambda}{n} (1 - e^{-\lambda/n})$

Là un peu d'analyse gentille montre que $\frac{\lambda}{n} (1 - e^{-\lambda/n}) \leq \frac{\lambda^2}{n^2}$. En fait c'est le a).

e)

Comme $X = X_1 + \dots + X_n$ et $Y = Y_1 + \dots + Y_n$, si $X(\omega) \neq Y(\omega)$ alors en particulier il existe un i tel que $X_i(\omega) \neq Y_i(\omega)$.

Donc $\{X \neq Y\} \subset \cup_{i=1}^n \{X_i \neq Y_i\}$ donc $\mathbb{P}(X \neq Y) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \neq Y_i) \leq \frac{\lambda^2}{n}$ d'après la question précédente.

f) Comme l'énoncé du théorème ne dépend que des lois de X et Y , on peut prendre X et Y comme définies dans les questions précédentes, qui vérifient bien les hyp. du théorème.

Par 1) c) $d(X, Y) \leq \mathbb{P}(X \neq Y)$, et avec la question précédente on a l'inégalité du théorème, appelée **inégalité de Le Cam**.

3) a) Pour $n \rightarrow +\infty$, le majorant λ^2/n tend vers zéro, donc chaque terme $P(X = k) - P(Y = k)$ tend vers zéro.

On retrouve le théorème d'approximation de Poisson, pour $X \sim \mathcal{B}(n, \lambda/n)$ chaque $P(X = k)$ tend vers $P(Y = k)$ où $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

b) Ce que donne l'inégalité de Le Cam est une majoration uniforme de la vitesse de convergence puisque notamment pour chaque k , $|P(X = k) - P(Y = k)| \leq \lambda^2/n$. Cela permet donc de dire plus précisément quelle erreur on fait en remplaçant la loi binomiale par une loi de Poisson en fonction de λ et de n .

Exercice 3. a) Comme p et q sont continues, le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire s'applique à l'E.D. de l'énoncé : si on fixe un $x_0 \in \mathbb{R}$, pour chaque couple $(y_0, v_0) \in \mathbb{K}^2$, il existe une unique $y \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}$ telle que $(y(x_0), y'(x_0)) = (y_0, v_0)$.

Ainsi l'application $\mathcal{S}_{\mathbb{K}} \rightarrow \mathbb{K}^2, y \mapsto (y(x_0), y'(x_0))$ est une bijection, et comme elle est évidemment linéaire, c'est un *isomorphisme d'e.v.*

Ainsi : $\boxed{\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{S}_{\mathbb{K}} = 2}$

b) (i) La linéarité de τ est immédiate : si $(f, g) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\tau(\lambda f + \mu g)(t) = (\lambda f + \mu g)(t+T) = \lambda f(t+T) + \mu g(t+T)$ par définition des loi sur les fonctions. Donc $\tau(\lambda f + \mu g) = \lambda \tau(f) + \mu \tau(g)$.

(ii) Stabilité de $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ par τ . Soit $y \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y''(t+T) + p(t+T)y'(t+T) + q(t+T)y(t+T) = 0$.

Mais comme p et q sont T -périodiques, on en déduit que $\forall t \in \mathbb{R}$, $y''(t+T) + p(t)y'(t+T) + q(t)y(t+T) = 0$.

Autrement dit $\tau(y) : t \mapsto y(t+T)$ vérifie la même E.D. que y , i.e. $\tau(y) \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}$.

c) On considère les deux solutions y_1 et y_2 aux pb. de Cauchy définis par l'E.D. et $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$ resp. $y_2(0) = 0$ et $y_2'(0) = 1$.

Ces deux solutions sont à valeurs réelles (par théorème d'existence et d'unicité dans $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$) sont trivialement indépendantes aussi bien sur \mathbb{R} que sur \mathbb{C} .

Donc (y_1, y_2) forment une base de $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$.

d) Soit $\mathcal{B} = (y_1, y_2)$ comme défini au c).

Si on note $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\tau) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$, on a par déf. de τ :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} y_1(t+T) & y_2(t+T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \end{pmatrix}$$

En dérivant cette égalité :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} y_1'(t+T) & y_2'(t+T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix}$$

ce qu'on peut écrire encore :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} y_1(t+T) & y_2(t+T) \\ y_1'(t+T) & y_2'(t+T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix}$$

Or, on sait que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la matrice $\begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix}$ est *invertible* (son déterminant est le Wronskien), ainsi par exemple en évaluant en 0, on obtient :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} y_1(T) & y_2(T) \\ y_1'(T) & y_2'(T) \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

Ainsi $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\tau_0) \in M_2(\mathbb{R})$ ce qui montre bien que son polynôme caractéristique est à coefficients réels.

Remarque : ce qui précède est valable pour toute base (y_1, y_2) de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$. Mais si on plus on choisit, comme dit plus haut, que $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$ et $y_2(0) = 0$ et $y_2'(0) = 1$ alors la relation précédente devient :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(T) & y_2(T) \\ y_1'(T) & y_2'(T) \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

e) Avec la dernière relation obtenue au d), on voit que $\det(\tau_0) = \det \begin{pmatrix} y_1(T) & y_2(T) \\ y_1'(T) & y_2'(T) \end{pmatrix} = W(T)$

où W est le Wronskien.

On sait que $W = \det(y_1, y_2)$ vérifie l'E.D. $W' = -pW$ et comme $W(0) = 1$, $W(t) = \exp(-\int_0^t p)$.

On conclut bien que $\det(\tau_0) = W(T) = \exp(-\int_0^T p)$.

f) Désormais $\det(\tau_0) = 1$ donc le produit des v.p. fait 1.

i) Si les v.p. sont complexes conjuguées, on les note λ et $\bar{\lambda}$, comme le produit des v.p. fait 1, on a $\lambda\bar{\lambda} = 1$ donc les v.p. sont de module 1.

Alors dans $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$, on peut considérer une base (z_1, z_2) de vect. propres pour τ_0 et toutes les $y \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ s'écrivent $y = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2$.

Alors pour tout $x \in [0, T]$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $y(x + nT) = \alpha_1 \lambda_1^n z_1(x) + \alpha_2 \lambda_2^n z_2(x)$ avec λ_1 et λ_2 les deux v.p. de module 1.

Mais alors en notant M_1 et M_2 un majorant de $|z_1|$ resp $|z_2|$ sur $[0, T]$, on a $|y| \leq |\alpha_1| M_1 + |\alpha_2| M_2$ sur \mathbb{R} .

ii) Notons λ_1 et λ_2 les deux v.p. réelles distinctes de τ_0 . Comme $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$, on peut choisir SRdG $|\lambda_1| < 1 < |\lambda_2|$. On note encore z_1 et z_2 des vecteurs propres de τ_0 pour λ_1 et λ_2 .

Alors pour tout $y \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}$, $\exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $y(x) = \lambda_1 z_1(x) + \lambda_2 z_2(x)$.

De même pour tout $x \in [0, T]$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $y(x + nT) = \alpha_1 \lambda_1^n z_1(x) + \alpha_2 \lambda_2^n z_2(x)$.

Mais si $\alpha_1 \neq 0$, $\lambda_1^n z_1(x) \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} +\infty$ et $2\lambda_2^n z_2(x) \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} 0$ donc par somme si $\alpha_1 \neq 0$, $y(x + nT) \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} +\infty$ donc y est *non bornée*.

De même si $\alpha_2 \neq 0$, $y(x + nT) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ donc y est *non bornée*.

Donc la seule fonction bornée dans $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ est celle pour laquelle $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ i.e. la fonction nulle.

iii) Comme τ_0 possède une seule valeur propre $\lambda \in \{-1, 1\}$, et que $\tau_0 \neq \pm \text{id}$, on sait que τ_0 n'est pas diagonalisable.

Dans ce cas, on peut écrire la matrice de τ_0 dans une base (z_1, z_2) où le premier vecteur est propre sous la forme $\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $\mu \neq 0$.

Si $\lambda = 1$, on a $\tau_0(z_1) = z_1$ i.e. $\forall t \in \mathbb{R}$, $z_1(t + T) = z_1(t)$ donc z_1 est T -périodique.

Si $\lambda = -1$, on a $\tau_0(z_1) = -z_1$, i.e. $\forall t \in \mathbb{R}$, $z_1(t + T) = -z_1(t)$ donc z_1 est T -antipériodique donc z_1 est $2T$ -périodique.

Donc dans les deux cas, en posant $\varphi = z_1$, on a une solution périodique donc bornée (car continue périodique sur \mathbb{R}) et tous les éléments de la droite $\mathbb{C}\varphi$ sont aussi périodiques et donc bornés.

Par récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\text{Mat}_{(z_1, z_2)}(\tau_0^n) = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\mu\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$

Pour $y \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ quelconque, qu'on écrit $y = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2$, on a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, y(x + nT) &= \alpha_1 z_1(x + nT) + \alpha_2 z_2(x + nT), \\ &= \alpha_1 \lambda^n z_1(x) + \alpha_2 (n\mu\lambda^{n-1} z_1(x) + \lambda^n z_2(x)) \quad (\dagger) \end{aligned}$$

Si $y \notin \text{Vect}(\varphi) = \text{Vect}(z_1)$ on a $\alpha_2 \neq 0$ et comme $\mu \neq 0$, $n\mu\lambda^{n-1} z_1(x) = n|\mu||z_1(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Comme les autres termes de (\dagger) sont bornés on en déduit bien que si $\alpha_2 \neq 0$, $y(x + nT) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Cela montre bien que *les seules* solutions bornées dans $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ sont les éléments de $\text{Vect}(\varphi)$.

iv) Si $\tau_0 = \pm \text{id}$ tout élément de $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ est périodique de période T ou $2T$.

Exercice 4. 4.1. Résolvante :

- a) Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire dit que Φ_{t_0} est un isomorphisme d'e.v.
b) Soit $V \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ quelconque, et X l'unique solution de (E) telle que $X(t_0) = V$.
D'un côté $R(t_2, t_0).V = X(t_2)$, de l'autre côté $R(t_2, t_1).R(t_1, t_0).V = R(t_2, t_1).X(t_1) = X(t_2)$.
Ainsi $R(t_2, t_0).V = R(t_2, t_1).R(t_1, t_0).V$ pour tout vecteur V .

- c) On fixe un vecteur $V \in M_{n,1}(\mathbb{K})$. On note X la solution de (E) telle que $X(t_0) = V$.
Alors $\frac{d}{dt}(R(t, t_0)).V = \frac{d}{dt}(R(t, t_0).V) = \frac{d}{dt}(X(t)) = A(t)X(t) = A(t).R(t, t_0).V$.
Cette propriété étant vraie pour tout vecteur V , on a la conclusion annoncée.
- d) Par déf. de $R(t, t_0)$ on a bien $R(t_0, t_0) = I_n$. D'autre part, d'après la question précédente, $t \mapsto R(t, t_0)$ vérifie bien l'E.D. à inconnue matricielle demandée.
Pour l'unicité, il suffit de se rappeler que le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire est donné pour toutes les E.D.L à solutions dans un e.v.n. de dim. finie donc aussi pour l'E.D. à inconnue matricielle donnée ici.

4.2. Application aux systèmes linéaires homogènes à coefficients périodiques

- a) Bien sûr si X est T -périodique, alors, en particulier $X(0) = X(T)$.
Réciproquement, supposons que $X(0) = X(T)$. Soit Z définie par $\forall t \in \mathbb{R}, Z(t) = X(t+T)$.
Comme A est T -périodique, pour tout $t \in \mathbb{R}, X'(t+T) = A(t+T).X(t+T) = A(t).X(t+T)$.
Donc $\forall t \in \mathbb{R}, Z'(t) = A(t).Z(t)$ et $Z(0) = X(T) = X(0)$.
Donc Z et X vérifie le même système différentiel linéaire à coefficient continu, avec la même condition initiale, donc par théorème d'unicité de Cauchy-Lipschitz : $\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = Z(t) = X(t+T)$.
Donc X est bien T -périodique.
- b) Avec les notations du 4.1. l'égalité à montrer s'écrit :

$$R(t+T, 0) = R(t, 0).R(T, 0)$$

Or par le 4.1. b), on sait que $R(t+T, 0) = R(t+T; T).R(T, 0)$.

Pour conclure il suffit donc de montrer que :

$$R(t, 0) = R(t+T, T) \quad (*)$$

Or par 4.1. d) $R(t, 0)$ est solution du problème de Cauchy $M'(t) = A(t).M(t)$ avec $M(0) = I_n$.
et $N(t) := R(t+T, T)$ est solution du problème de Cauchy $N'(t) = A(t+T)N(t) = A(t)N(t)$
avec $N(0) = R(T, T) = I_n$.

On conclut que $(*)$ est vraie par théorème d'unicité de Cauchy-Lipschitz.

- c) (i) Par déf. pour tout $t \in \mathbb{R}, Y(t+T) = M(t+T).e^{-(T+t)L} = M(t).M(T).e^{-TL}e^{-tL}$ par b).
Par déf. de $L, e^{-TL} = e^{-L_0} = M(T)^{-1}$ donc $Y(t+T) = M(t).e^{-tL} = Y(t)$.
(ii) D'abord la fonction Y est bien définie car les matrices $M(t)$ et $\exp(-tL)$ sont inversibles pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc $Y(t) = e^{tL}M(t)^{-1}X(t)$.
On a ensuite $X(t) = R(t, 0)X(0) = M(t)X(0)$ et $Y(t) = e^{tL}M(t)^{-1}M(t)X(0) = e^{tL}X(0)$
Comme $Y(0) = e^{0L}M(0)^{-1}X(0) = X(0)$, on conclut bien que $Y(t) = e^{tL}Y(0)$ donc Y vérifie bien le système à coefficient constant $Y' = LY$.

Ce résultat s'appelle **théorème de Floquet** (iii) Question de synthèse, résultat assez jolie.
Par le (i) et le (ii), (E) admet une solution T -périodique non nulle si, et seulement si, l'équation à coefficient constant $Y'(t) = L.Y(t)$ admet une telle solution T -périodique.

Or par le a), appliqué à cette équation, ceci équivaut à l'existence d'une solution Y non nulle telle $Y(T) = Y(0)$.

Or pour les équations à coefficients constant, on sait que $Y(t) = \exp(tL)Y(0)$.

Donc la condition $Y(T) = Y(0)$ équivaut à $Y(T) = \exp(TL)Y(0)$ i.e. à $Y(0) \in \ker(\exp(TL) - \text{id})$ ce qui signifie bien, avec $Y(0) \neq 0$, que $\exp(TL)$ admet 1 comme valeur propre.