

Exercice 1 (Fonction de Bessel J_0). a) Trouver les solutions D.S.E. de l'E.D. $xy'' + y' + y = 0$. On note f celle qui vaut 1 en 0.

b) Montrer qu'il existe un $x_0 \in]0, 2]$ qui est le plus petit zéro de f dans cet intervalle autrement dit $f(x_0) = 0$ et $\forall x \in]0, x_0[, f(x) \neq 0$.

Comportement qualitatifs des équations du second ordre à coeff. non constant

Exercice 2. Soit $(E) : y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x)$ avec a_1, a_0, b continue sur un intervalle I .

- a) Théorème de séparation de Sturm : Montrer que si y est une solution de (E) qui n'est pas la fonction nulle et si $y(x_0) = 0$ alors il existe un voisinage de x_0 sur lequel y ne s'annule pas à part en x_0 .
- b) Théorème d'entrelacement : Montrer que si y_1 et y_2 sont deux solutions indépendantes de l'équation homogène associée (E_H) alors, entre deux zéros consécutifs de y_1 , il y a exactement un zéro de y_2 . *Indication* – Considérer le wronskien des solutions (y_1, y_2) .

Exercice 3 (Bornitude et Wronskien). Soit (E) une E.D. de la forme $y''(t) + q(t)y(t) = 0$ avec $q \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et q intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que (E) admet des solutions non bornées sur $\mathbb{R}^+$.
Indication – Considérer le wronskien.

Exercice 4. 4.0) Ecriture intégrale d'un problème de Cauchy linéaire d'ordre 1 :

On considère un intervalle I , une fonction $a \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, un couple $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$.

- a) Justifier qu'une fonction $y \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ est solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ \forall x \in I, y'(x) = a(x)y(x) \end{cases}$

si et seulement si $\forall x \in I, y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x a(t)y(t)dt$.

b) Donner une écriture intégrale analogue sous la forme d'une inéquation, vérifiée par ce qu'on appelle les « sous-solutions » à ce même problème de Cauchy i.e les fonctions $y \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ telle que $y(x_0) \leq y_0$ et $\forall x \in I, x \geq x_0 \Rightarrow y'(x) \leq a(x)y(x)$.

4.1) Une résultat général sur les inéquations différentielles

a) Ecriture intégrale : (lemme de Gronwall)

Soit $I = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et v et y deux fonctions continues positives sur $[a, b]$, vérifiant, pour tout $x \in I$:

$$y(x) \leq \lambda + \int_a^x v(t)y(t)dt,$$

Montrer qu'alors : $\forall x \in I, y(x) \leq \lambda \exp\left(\int_a^x v(t)dt\right)$.

On pourra étudier $G(x) = \int_a^x v(t)y(t)dt$.

b) Traduction en terme d'inéquations différentielles :

Justifier que le résultat du a) donne une comparaison entre les solutions d'une inéquation différentielle et celles de l'E.D. qu'on obtient en remplaçant le $\leq$ par un $=$.

4.2) Etude d'un oscillateur harmonique avec une perturbation non constante

Soit $(\mathcal{H}) : y'' + (1 + \varphi(x))y = 0$ où $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.

a) En voyant l'E.D. sous la forme $y'' + y = -\varphi y$ et en appliquant la M.V.C. montrer si y vérifie $(\mathcal{H})$ alors : $\exists a \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}^+, |y(x)| \leq a + \int_0^x |\varphi(t)y(t)|dt$.

b) En déduire que toute solution de $(\mathcal{H})$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Les yeux de l'algèbre : l'importance de la décomposition sur les s.e.v. caractéristique pour l'exp. de matrice et les E.D.

Exercice 5 (Pour le comportement de $\exp(tA)$ quand $t \rightarrow +\infty$). Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$.
Montrer que $\exp(tA) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0 \Leftrightarrow \text{Sp}(A) \subset \{z \in \mathbb{C}, \text{Re}(z) < 0\}$.

Exercice 6 (Suite du précédent). Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que les trois prop. suivantes sont équivalentes :

- (i) Le système différentiel $X'(t) = A.X(t)$ a toutes ses solutions bornées sur $\mathbb{R}$,
- (ii) $t \mapsto \exp(tA)$ est une fonction bornée sur $\mathbb{R}$,
- (iii) la matrice A est *diagonalisable* et a toutes ses valeurs propres *imaginaires pures*.

Exercice 7 (Pour les antécédents d'une matrice par exp). Déterminer toutes les matrices $A \in M_n(\mathbb{C})$ telles que $\exp(A) = I_n$.

Indication – On pourra commencer par considérer les v.p. de A . Puis avec la décomposition sur les s.e.v. caractéristiques montrer qu'en fait sur chaque s.e.v. caractéristique les parties nilpotentes sont nulles, et donc A est dz.

Exercice 8 (Pour une forme explicite annoncée en cours). Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ de polynôme minimal $\mu_A = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{m_k}$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont deux à deux distinctes. Alors les solutions du système différentiel $X'(t) = A.X(t)$ sont les fonctions définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \sum_{k=0}^p e^{\lambda_k t} P_k(t),$$

où, pour chaque k , $P_k : \mathbb{R} \rightarrow M_{n,1}(\mathbb{C})$ est une fonction polynomiale qcq. de degré au plus $m_k - 1$.

Les yeux de la géométrie : Un mini-exposé de Nicolas : diagramme de bifurcations pour les matrices 2×2

L'exercice qui suit va donner une vision géométrique de certains phénomènes vus à l'ex. 6.

Exercice 9 (Dessins un peu!). On considère un système linéaire $X'(t) = AX(t)$ avec $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ et $A \in M_2(\mathbb{R})$ matrice constante. Le but de cet exercice est *classifier* les allures des trajectoires $t \mapsto X(t)$ des solutions suivant les propriétés de A .

L'origine est toujours un point d'équilibre du système : si $X(0) = 0$ alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = 0$. C'est le seul si $\det(A) \neq 0$. Dans chaque cas suivez dessinez suffisamment de courbes $X : t \mapsto (x(t), y(t))$. On ne considère ici que les cas « génériques » où $\det(A) \neq 0$ et les v.p. sont distinctes.

- a) **Cas où A admet deux v.p. réelles distinctes λ_1, λ_2 et non nulles.** On fixe une base de vecteurs propres (V_1, V_2) associés.

Les solutions différentes s'écrivent $X(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} V_2$. Tracer ces solutions dans le repère $(0, V_1, V_2)$.

- i) Cas où $0 < \lambda_1 < \lambda_2$: noeud répulsif.

Indication pour le tracé : d'où partent les solutions quand t vient de $-\infty$? Avec quelle tangentes ? Où vont-elles ? Tracer différents cas suivant les signes de C_1, C_2 .

- ii) Cas où $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$: col.

- iii) Cas où $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$: noeud attractif.

- b) **Cas où les v.p. de A sont complexes non réelles** On les note $\alpha \pm i\beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

On note V_1 et V_2 dans $M_{2,1}(\mathbb{C})$ les vecteurs propres associés. On considère $W_1 = \text{Re}(V_1)$ et $W_2 = -\text{Im}(V_1)$.

- i) Justifier que
$$\begin{cases} AW_1 = \alpha W_1 + \beta W_2 \\ AW_2 = -\beta W_1 + \alpha W_2 \end{cases}.$$

- ii) En notant $a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ l'endo. can. associé à A , et (w_1, w_2) les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ qui s'écrivent W_1, W_2 dans la base canonique, quelle est la matrice A_1 de a dans $\mathcal{B}_1 = (w_1, w_2)$?

- iii) En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp(tA_1) = e^{t\alpha} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & -\sin(\beta t) \\ \sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}$.

- iv) En déduire la forme des courbes solutions $t \mapsto X(t)$ suivant que $\alpha > 0$, $\alpha = 0$, $\alpha < 0$ appelées *foyer attractif*, *centre*, *foyer répulsif*.