

Banque CCINP : Ex. 30, 31, 32, 42, 55, 74, 75

Exercices de révisions de première année pour les 5/2 :

Exercice 1. Trouver toutes les fonctions $y \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant l'E.D. $xy' - 4y = 0$.

Exercice 2. a) Résoudre sur chaque intervalle $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$ l'E.D. $x \ln(x)y' + y = x$.
b) Etudier les éventuelles solutions sur $]0, +\infty[$ de cette même E.D.

Exercice 3. Résoudre l'E.D. $y' = |y|$ d'inconnue $y \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec la C.I. $y(0) = 1$

Exercice 4 (Un calcul d'inf. de norme 1). Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}), f(0) = 0, f(1) = 1\}$. Pour $f \in E$, on note $I(f) = \int_0^1 |f - f'|$

a) Montrer que pour tout $f \in E$, $I(f) \geq 1/e$.

b) Montrer qu'il n'existe pas de $f \in E$ tel que $I(f) = 1/e$.

N.B. Comparer cet exercice au calcul de $\inf_{f \in E} N_2(f - f') \dots$ qui se traiterait plutôt avec Cauchy-Schwarz.

Exercice 5. Soit $\alpha > 0$ et soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) + \alpha f(x) = 0 \in \mathbb{R}$. On veut montrer qu'alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

a) En posant $\varphi = f' + \alpha f$ exprimer f en fonction de φ via la M.V.C.

b) Ensuite pour montrer que le terme intégral tend vers zéro, prendre un ε

c) Généralisation : on suppose maintenant qu'on a les mêmes hypothèses mais que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) + \alpha f(x) = l \in \mathbb{R}$. Que conclure sur $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$?

Exercice 6. Résoudre $y'' - y = e^x + e^{-x}$.

Exercice 7. Résoudre $\begin{cases} y'' + 4y = \sin^2(x), \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$ sans la M.V.C !

Bonus : Exemples de changement de variable et de réduction de l'ordre avec une solution trouvée par D.S.E.

T.S.V.P.

Système différentiel homogène à coefficients constants

Exercice 8. a) Résoudre le système $X' = AX$ où $A = \begin{pmatrix} 13 & -12 & -6 \\ 6 & -5 & -3 \\ 18 & -18 & -8 \end{pmatrix}$ d'inconnue $t \mapsto X(t) \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ (on donnera une base de l'espace des solutions).

b) Déterminer l'unique solution X du système précédent telle que $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Exercice 9. On considère le système différentiel $\begin{cases} u'(x) = v(x), \\ v'(x) = w(x) \\ w'(x) = u(x) \end{cases}$ a) Déterminer l'ensemble des solutions complexes de (E) sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminer l'ensemble des solutions réelles de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exponentielle matricielle

Méthodes de calcul de l'exp. matricielle :

Idée : un polynôme annulateur donne une relation de récurrence linéaire entre les A^k pour les matrices 2×2 une rel. de réc. d'ordre 2 donne la forme de tous les A^k et permet facilement de calculer $\exp(A)$.

Exercice 10. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $\exp(A) \cdot \exp(B)$, $\exp(B) \cdot \exp(A)$ et $\exp(A+B)$.

Exercice 11. Soit $t \in \mathbb{R}$ et $R_t = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$

a) Dans cette question on suppose que $t \neq 0 \pmod{\pi}$. Déterminer toutes les matrices $M \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $\exp(M) = R_t$.

Indication – On pourra considérer d'abord la trace des M candidats puis justifier que M et R_t commutent.

b) *Plus difficile ?* Que dire dans le cas où $t \equiv 0 \pmod{\pi}$?

Systèmes Différentiels à coeff. constants avec second membre

En pratique, on évite la M.V.C. matricielle, réservée aux questions théoriques. Dans le cas où A est dz, on diagonalise le système en transformant les S.M., ou bien on bricole.

La même alternative s'applique au cas tz.

Exercice 12. Résoudre : $\begin{cases} x'(t) + x(t) + y(t) = t^2, \\ y'(t) + y(t) + z(t) = t \\ z'(t) + z(t) = 1 \end{cases}$

Exercice 13. On considère le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} 2x' + y' = 3x + y + t, \\ x' + y' = 4x + y + e^t \end{cases}$$

Résoudre ce système :

a) A l'aide des outils matriciels (y compris la M.V.C matricielle) en l'écrivant $X'(t) = A \cdot X(t) + B(t)$ avec $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

b) De manière plus élémentaire (et moins couteuse en calculs).