

Banque CCINP : Ex. 33, 52, 57, 58.

Continuité et différentiabilité de fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ « concrètes »

Exercice 1. Etudier la continuité en $(0, 0)$ de la fonction f définie par $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad x = (x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} \frac{x_1^2}{x_2} & \text{si } x_2 \neq 0 \\ 0 & \text{si } x_2 = 0 \end{cases}$

- (i) Montrer que f admet en $(0, 0)$ une dérivée suivant tout vecteur.
- (ii) Montrer que f n'est pas continue en 0.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \begin{cases} (x^2 - y^2) \ln(x^2 + y^2), & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Différentielles d'applications matricielles

Exercice 4. Soit $E = M_n(\mathbb{R})$

- a) Soit $f : E \rightarrow E, M \mapsto M^3$. Calculer $df(M).H$ pour tout $(M, H) \in E^2$.
- b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, M \mapsto \text{Tr}(M^k)$. Calculer $d\varphi(M)$ pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 5. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $M : \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, M'(t) = AM(t) - M(t)A.$$

Démontrer que le polynôme caractéristique de $\chi_{M(t)}$ est indépendant de t .

Le rôle clef joué par les fonctions auxiliaires d'une variable réelle

Exercice 6 (Rolle). Soit U un ouvert d'un e.v.n. de dim. finie E tel que $\overline{U}$ soit compacte. Soit $f : \overline{U} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, différentiable sur U , nulle sur la frontière $\overline{U} \setminus U$.

Montrer qu'il existe un $x_0 \in U$ tel que $df(x_0) = 0$.

Exercice 7 (Fonctions convexes : caractérisations par la différentielle). Soit Ω un ouvert convexe de $E = \mathbb{R}^n$. Soit $f \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$.

On dit que f est convexe sur Ω ssi $\forall (a, b) \in \Omega^2, \forall t \in [0, 1], f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$.

a) Fonctions auxiliaires d'une variable réelle :

Pour tout $a \in \Omega$ et tout $x \in E \setminus \{0\}$, on pose $I_{a,x} = \{t \in \mathbb{R}, a + tx \in \Omega\}$.

On pose $\varphi_{a,x} : I_{a,x} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f(a + tx)$.

Montrer que f est convexe sur Ω si, et seulement si, toutes les fonctions $\varphi_{a,x}$ pour $a \in \Omega$ et $x \in E$ sont convexes.

b) On suppose que f est différentiable sur Ω .

Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) f est convexe sur Ω ,
- (ii) $\forall (a, b) \in \Omega^2, df(b)(b - a) \geq df(a)(b - a)$,
- (iii) $\forall (a, b) \in \Omega^2, f(b) - f(a) \geq df(a)(b - a)$.

c) On suppose encore que f est différentiable sur Ω . Soit $a \in \Omega$ un point critique de f i.e. tel que $df(a) = 0$. Montrer que $f(a)$ réalise le minimum global de f sur Ω .

Extrema

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto (x - y)e^{-x^2 - y^2}$.

Montrer que f admet un maximum et un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et les déterminer.

Fonctions deux fois dérivables

Exercice 9 (Contre-exemple au théorème de Schwarz). Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, on pose $f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$. On pose $f(0, 0) = 0$.

Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0)$ existent et ne sont pas égales.

E.D.P.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, t) \mapsto f(x, t)$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}$ sur $\mathbb{R}^2$. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x, 0) > 0$. Montrer que pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2, f(x, t) > 0$.

Exercice 11 (Equation des ondes avec une C.I.). On veut résoudre l'E.D.P. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$ avec les conditions suivantes : $\frac{\partial f}{\partial t}(0, t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $f(x, 0) = f_0(x)$ où f_0 est une fonction donnée telle que $f_0(0) = 0$.

Trouver une CNS sur la fonction f_0 pour que cela soit possible.

Exercice 12 (Potentiels centraux $F(x_1, \dots, x_n) = f(r)$ harmoniques). Déterminer les $f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que : si $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $F(x_1, \dots, x_n) = f(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2})$, on ait $\Delta F = 0$ i.e. $\sum_{i=1}^n \partial^2 F / \partial x_i^2 = 0$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Démonstration de l'existence d'un potentiel ; intégration le long d'un chemin

Exercice 13 (Lemme de Poincaré avec $U = \mathbb{R}^n$). Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ on note $(f_1, \dots, f_n)$ ses fonctions composantes.

Montrer qu'il existe $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ si, et seulement si, la matrice jacobienne $Jf(x)$ est symétrique en tout point $x \in \mathbb{R}^n$.

Indication – Pour le sens difficile, considérer $\varphi(x) = \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 f_i(tx) dt$ en expliquant d'où vient ce candidat.

Complément : I.A.F.

Exercice 14. 1) Préliminaire, notion Incontournable pour beaucoup de problème (même hors calcul-diff) : norme subordonnée.

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux e.v.n. et $L \in \mathcal{L}_c(E, F)$ une application linéaire *continue* de E dans F .

a) Justifier que $\sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|L(x)\|_F}{\|x\|_E}$ existe. On le note $\|L\|$ (ou $\|L\|$) ;

b) Justifier que $\|L\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \frac{\|L(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E = 1} \|L(x)\|_F$ et que $\|L\|$ est aussi le plus petit rapport de Lipschitz de L .

c) Justifier que $L \mapsto \|L\|$ est une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$ appelée norme d'opérateur dans $\mathcal{L}(E, F)$ subordonnée aux choix des normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$.

d) Justifier enfin que si $L' \in \mathcal{L}_c(F, G)$ alors $\|L' \circ L\| \leq \|L'\| \cdot \|L\|$. En particulier si $E = F$, l'application $L \in \mathcal{L}_c(E) \rightarrow \mathbb{R}^+, L \mapsto \|L\|$ est une norme d'algèbre.

N.B. La norme subordonnée est souvent notée avec trois barres $\|L\|$.

2) Application à l'I.A.F. (H.P. pour les fonctions de plusieurs variables puisque les normes d'opérateurs sont elles-mêmes H.P)

I.A.F. soit U un ouvert de E et $f \in \mathcal{C}^1(U, F)$. On suppose qu'il existe une boule fermée $B_f(a, r) \subset U$ et un réel positif M tel que :

$$\forall x \in B_f(a, r), \|df(a)\| \leq M.$$

Montrer que $f|_{B_f(a, r)}$ est M -lipschitzienne.