

MP2 DS 8

Exercice 1.

- a) Soient E un e.v.n. de dimension finie, U un ouvert de E et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable.
- i) Soit $a \in U$: donner la définition de « f admet un extremum local en a »
 - ii) Montrer que si f admet un extremum local en a alors $df(a) = 0$.
- b) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto (x^2 + y^2 - 8)(x^2 + y^2)$
- i) Justifier que $df(a) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$.
 - ii) Déterminer les *points critiques* de f , c'est-à-dire les $a \in \mathbb{R}^2$ tels que $df(a) = 0$.
 - iii) Etudier le signe de $f(x, y)$ en fonction de $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. En déduire les extrema locaux de f .
 - iv) Les extrema locaux trouvés à la question précédente sont-ils des extrema globaux ?

Exercice 2. Le but de cet exercice est de démontrer le théorème suivant :

Théorème – Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in]0, n[$, X et Y deux v.a.d. sur cet espace probabilisé telles que $X \sim \mathcal{B}(n, \lambda/n)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors :

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} |\mathbb{P}(X = k) - \mathbb{P}(Y = k)| \leq \frac{\lambda^2}{n}.$$

2.1) Une pseudo-distance entre v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ et ses propriétés :

Pour deux v.a. quelconques X, Y sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$, on définit :

$$d(X, Y) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} |\mathbb{P}(X = k) - \mathbb{P}(Y = k)|$$

- a)
 - i) Justifier que $d(X, Y) < +\infty$.
 - ii) Soit E un ensemble et $\delta : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$.
On dit que δ est une *distance sur E* si, et seulement si δ a les trois propriétés suivantes :
- (D1) $\forall (x, y) \in E^2$ $\delta(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
 - (D2) $\forall (x, y) \in E^2$, $\delta(x, y) = \delta(y, x)$
 - (D3) $\forall (x, y, z) \in E^3$, $\delta(x, z) \leq \delta(x, y) + \delta(y, z)$.

La fonction d définie ci-dessus sur E^2 où $E = \mathcal{V}_d(\Omega, \mathbb{N})$ est-elle une distance ?

- b) Le but de cette question est de démontrer que pour toute partie $B \subset \mathbb{N}$,

$$|\mathbb{P}(X \in B) - \mathbb{P}(Y \in B)| \leq d(X, Y) \quad (\dagger)$$

- i) On note $A = \{k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) \geq \mathbb{P}(Y = k)\}$. Montrer que :

$$d(X, Y) = \mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A)$$

- ii) En déduire la propriété $(\dagger)$ demandée en considérant $B \cap A$ et $B \cap A^c$.

Remarque : Avec (i) et (ii) on a aussi $d(X, Y) = \sup_{B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})} |\mathbb{P}(X \in B) - \mathbb{P}(Y \in B)|$, ce sup étant atteint pour l'ensemble A ci-dessus.

- c) A l'aide de la question précédente, montrer que :

$$d(X, Y) \leq \mathbb{P}(X \neq Y).$$

2.2) L'inégalité proprement dite

- a) Montrer que $\forall x \in [0, 1], 1 - e^{-x} \leq x$.

Dans ce qui suit $U_1, \dots, U_n, Y_1, \dots, Y_n$ sont des v.a. mutuellement indépendantes et chaque v.a. U_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $f(\lambda/n)$ où f est la fonction définie au a) et $\lambda \in]0, 1[$ est fixé et chaque Y_i une loi de Poisson de paramètre λ/n .

On pose encore $Y = Y_1 + \dots + Y_n$. Enfin, pour chaque $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, X_i est une v.a. de Bernoulli qui vaut 0 si $U_i = Y_i = 0$ et 1 sinon.

- b) On a dit que X_i suit une loi de Bernoulli, ce qu'on note $X_i \sim \mathcal{B}(p_i)$. Expliciter la valeur de ce paramètre p_i en fonction des données.
- c) En déduire la loi de $X = X_1 + \dots + X_n$.
- d) Déterminer la loi de Y .
- e) Montrer que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathbb{P}(X_i \neq Y_i) \leq \frac{\lambda^2}{n^2}$.
- f) En déduire un majorant de $\mathbb{P}(X \neq Y)$.
- g) En déduire le théorème annoncé.

2.3) Lien avec un théorème du cours

- a) Quel résultat du cours retrouve-t-on si on passe à la limite pour $n \rightarrow +\infty$ dans le théorème encadré ?
- b) Quelle précision donne le théorème encadré par rapport à ce théorème du cours ?

Exercice 3. Soit $T \in \mathbb{R}^{+*}$. On considère deux fonctions p, q continues T -périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et l'E.D.

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0,$$

dont on note $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ (resp. $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$) l'espace vectoriel des solutions à valeurs réelles (resp. à valeurs complexes).

- a) Donner, en la justifiant rapidement, la dimension de $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}$ comme $\mathbb{K}$ -e.v. (pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
- b) Pour $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ on définit $f_T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto f(t+T)$.
Soit $\tau : \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}), f \mapsto f_T$.
Justifier que τ est une application $\mathbb{C}$ -linéaire du $\mathbb{C}$ -e.v. $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dans lui-même puis montrer que $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ est stable par τ .

On τ_0 la restriction de τ à $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$

- c) Justifier que $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ admet une base, comme $\mathbb{C}$ -e.v., formée deux fonctions y_1, y_2 qui sont dans $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$.
- d) Montrer que le polynôme caractéristique de τ_0 est à coefficients réels.
Indication – On pourra montrer que τ_0 s'écrit avec une matrice à coefficients réels dans une base de $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ fournie par la question c).

- e) Montrer que le déterminant de τ_0 est $\exp(-\int_0^T p(t)dt)$.
- f) Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que $p = 0$, donc l'E.D. est $y''(x) + q(x)y(x) = 0$ et par c), τ_0 est de déterminant 1. On va étudier les solutions bornées dans $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ dans les trois cas suivants qui donnent tous les cas possibles. Montrer que :
- i) Si τ_0 a deux valeurs propres distinctes complexes conjuguées, alors toutes les solutions sont bornées.
- ii) Si τ_0 a deux valeurs propres réelles distinctes, alors la seule solution bornée est la solution nulle.
- iii) Si τ_0 a une valeur propre double, qui est forcément $\lambda = \pm 1$ et que $\tau_0 \neq \pm \text{id}$ alors l'E.D. possède une solution périodique non nulle φ (de période T ou $2T$) et l'ensemble des solutions bornées est la droite vectorielle engendrée par φ .
- iv) Traiter enfin le cas où $\tau_0 = \pm \text{id}$.