

## MP2 DS 8, solutions

**Exercice 1.**

a) Question de cours pur sucre.

(i) Par déf.  $f$  admet un maximum local en  $a$  ssi il existe  $V$  un voisinage de  $a$  dans  $U$  tel que  $\forall x \in V, f(x) \leq f(a)$ .

De même pour minimum local en renversant la dernière inégalité.

(ii) Soit  $v$  un vecteur quelconque. Comme  $U$  est ouvert il existe un  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $t \in ]-\varepsilon, +\varepsilon[, a + tv \in U$ .

Soit  $\varphi : ]-\varepsilon, +\varepsilon[ \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f(a + tv)$ .

Par déf.  $\varphi$  admet un extremum local en 0 donc  $\varphi'(0) = 0$ . Or  $\varphi'(0) = df(a).v$ .

Ainsi pour tout  $v \in E, df(a).v = 0$  donc  $df(a) = 0$ .

b) (i) Comme  $df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ , on sait que  $df(a) = 0$  ssi  $df(a).e_1 = 0$  et  $df(a).e_2 = 0$  pour  $(e_1, e_2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ .

$$\text{Or } df(a).e_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(a) \text{ et } df(a).e_2 = \frac{\partial f}{\partial y}(a).$$

D'où l'équivalence annoncée.

(ii) Par déf. de  $f$ , on sait que pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x(x^2 + y^2) + 2x(x^2 + y^2 - 8) = 2x(2x^2 + 2y^2 - 8) = 4x(x^2 + y^2 - 4)$ .

$$\text{De même } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y(x^2 + y^2) + 2y(x^2 + y^2 - 8) = 2y(2x^2 + 2y^2 - 8) = 4y(x^2 + y^2 - 4).$$

Ainsi  $a = (x, y)$  est un point critique de  $f$  si, et seulement si,  $\begin{cases} x(x^2 + y^2 - 4) = 0 \\ y(x^2 + y^2 - 4) = 0 \end{cases}$

Ceci équivaut à  $(x, y) = (0, 0)$  ou  $x^2 + y^2 = 4$ .

Donc l'ensemble des points critiques  $f$  est la réunion  $\{0\} \cup \Gamma$  où  $\Gamma$  est le cercle de centre 0 et de rayon 2.

(iii) Par déf.  $f(x, y) = (r^2 - 8).r^2$ . Donc  $f(x, y) \geq 0 \Leftrightarrow r^2 \geq 8 \Leftrightarrow r \geq 2\sqrt{2}$ .

(iv) On sait déjà que les seuls extrema locaux possibles sont à chercher aux points de  $\{0\} \cup \Gamma$ .

Réciproquement :

- On remarque que  $f(0, 0) = 0$  et  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \in B(0, 2\sqrt{2}) \Rightarrow f(x, y) \leq 0$ .

Donc  $f$  admet un maximum local en 0.

- Si on note  $\varphi(r) = (r^2 - 8).r^2, \varphi'(r) = 2r(r^2 - 8) + 2r.r^2 = 4r^3 - 16r = 4r(r^2 - 4)$ .

On en déduit que  $r \mapsto \varphi(r)$  est décroissante sur  $[0, 2]$  puis croissante sur  $[2, +\infty[$  donc admet un min global pour  $r = 2$ .

Donc  $f$  admet un min global sur  $\mathbb{R}^2$  atteint en chaque point du cercle  $\Gamma$ .

- L'ensemble des points où  $f$  admet des extrema locaux est exactement  $\{0\} \cup \Gamma$ .

(v) On a déjà dit au (iv) que tous les points de  $\Gamma$  donnent le minimum global de  $f$ .

En revanche en 0 on a seulement un max. local non global car  $f(x, 0) = x^2.(x^2 - 8) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$

donc  $f$  n'admet pas de maximum global sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercice 2.** 1) a) (i) Pour tout  $n \in \mathbb{N}, |\mathbb{P}(X = n) - \mathbb{P}(Y = n)| \leq \mathbb{P}(X = n) + \mathbb{P}(Y = n)$ .

Or les séries de termes généraux  $(\mathbb{P}(X = n))_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\mathbb{P}(Y = n))_{n \in \mathbb{N}}$  convergent avec pour somme 1.

Donc par majoration pour les séries à termes positifs,  $\sum |\mathbb{P}(X = n) - \mathbb{P}(Y = n)|$  converge et même  $d(X, Y) \leq 1$ .

1) a) (ii)  $d$  vérifie l'I.T. et la symétrie, mais bien sûr deux v.a. peuvent avoir la même loi en étant indépendantes par exemple donc non égales :

Ne pas confondre une v.a. et sa loi.

Donc  $d$  ne vérifie pas la propriété (D1), ce n'est pas une vraie distance.

b)(i) Comme  $A \amalg A^c = \mathbb{N}$ , on peut sommer par paquet la famille sommable de réels positifs  $|\mathbb{P}(X = n) - \mathbb{P}(Y = n)|_{n \in \mathbb{N}}$  et

$$\begin{aligned}
2d(X, Y) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} |\mathbb{P}(X = n) - \mathbb{P}(Y = n)| \quad \text{par déf} \\
&= \sum_{n \in A} |\mathbb{P}(X = n) - \mathbb{P}(Y = n)| + \sum_{n \in A^c} |\mathbb{P}(X = n) - \mathbb{P}(Y = n)| \quad \text{par sommation par paquets} \\
&= \sum_{n \in A} \mathbb{P}(X = n) - \mathbb{P}(Y = n) + \sum_{n \in A^c} \mathbb{P}(Y = n) - \mathbb{P}(X = n) \quad \text{par déf de } A \\
&= \mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A) + \mathbb{P}(Y \in A^c) - \mathbb{P}(X \in A^c) \\
&= \mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A) + 1 - \mathbb{P}(Y \in A) - (1 - \mathbb{P}(X \in A)) \\
&= 2\mathbb{P}(X \in A) - 2\mathbb{P}(Y \in A)
\end{aligned}$$

d'où le résultat voulu.

(ii) Pour  $B$  quelconque par exemple si  $\mathbb{P}(X \in B) - \mathbb{P}(Y \in B) \geq 0$  :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \in B) - \mathbb{P}(Y \in B) &= \mathbb{P}(X \in B \cap A) + \mathbb{P}(X \in B \cap A^c) - \mathbb{P}(Y \in B \cap A) - \mathbb{P}(Y \in B \cap A^c) \\
&= \sum_{k \in B \cap A} \mathbb{P}(X = k) + \sum_{k \in B \cap A^c} \mathbb{P}(X = k) - \sum_{k \in B \cap A} \mathbb{P}(Y = k) - \sum_{k \in B \cap A^c} \mathbb{P}(Y = k) \\
&= \sum_{k \in B \cap A} \mathbb{P}(X = k) - \mathbb{P}(Y = k) + \underbrace{\sum_{k \in B \cap A^c} \mathbb{P}(X = k) - \mathbb{P}(Y = k)}_{\leq 0 \text{ par déf. de } A^c}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \in B) - \mathbb{P}(Y \in B) &\leq \sum_{k \in B \cap A} \mathbb{P}(X = k) - \mathbb{P}(Y = k) \\
&\leq \sum_{k \in A} \mathbb{P}(X = k) - \mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A)
\end{aligned}$$

Donc par le résultat du (i), on a bien dans ce cas  $0 \leq \mathbb{P}(X \in B) - \mathbb{P}(Y \in B) \leq d(X, Y)$ .

**Remarque :** Avec (i) et (ii) on a aussi  $d(X, Y) = \sup_{B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})} |\mathbb{P}(X \in B) - \mathbb{P}(Y \in B)|$ , ce sup étant atteint pour l'ensemble  $A$  ci-dessus.

c) A l'aide de la question précédente, il suffit de montrer que pour tout  $B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ,

$$|\mathbb{P}(X \in B) - \mathbb{P}(Y \in B)| \leq \mathbb{P}(X \neq Y)$$

Par symétrie de  $X$  et  $Y$  dans les hypothèses, il suffit de montrer sans v.abs. que si  $0 \leq \mathbb{P}(X \in B) - \mathbb{P}(Y \in B)$  alors

$$\mathbb{P}(X \in B) - \mathbb{P}(Y \in B) \leq \mathbb{P}(X \neq Y),$$

ce qui s'écrit encore

$$\mathbb{P}(X \in B) \leq \mathbb{P}(Y \in B) + \mathbb{P}(X \neq Y)$$

Pour cela il suffit d'avoir l'inclusion ensembliste :

$$\{X \in B\} \subset \{Y \in B\} \cup \{X \neq Y\}$$

qui est triviale car si  $X(\omega) \in B$  alors ou bien  $X(\omega) \neq Y(\omega)$  ou bien  $X(\omega) = Y(\omega)$  et donc  $Y(\omega) \in B$ .

**N.B** Bien sûr, on peut faire ce raisonnement aussi seulement pour  $B = A$  si on veut.

2) a) L'inégalité à démontrer s'écrit encore  $1 - x \leq e^{-x}$ . Cette inégalité est en fait vraie pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , puisque par convexité de  $\exp$  et comparaison avec sa tangente en 0 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 1 + x \leq e^x$$

On peut bien sûr aussi faire l'étude de la fonction différence.

b) Par déf.  $\mathbb{P}(X_i = 0) = \mathbb{P}((U_i = 0) \cap (Y_i = 0)) = \mathbb{P}(U_i = 0) \cdot \mathbb{P}(Y_i = 0)$  par indépendance.

Par déf. de ces deux lois,  $\mathbb{P}(X_i = 0) = e^{\lambda/n} (1 - \lambda/n) e^{-\lambda/n} = (1 - \lambda/n)$ . Donc  $X_i \sim \mathcal{B}(\lambda/n)$ .

c) Par lemme des coalitions  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes, donc  $X \sim \mathcal{B}(n, \lambda/n)$ .

d) Exercice standard (par exemple avec les fonctions génératrices l'exp. est fait pour cela) : pour une v.a.  $Y_i$  suivant  $\mathcal{P}(\lambda_i)$ ,  $G_{Y_i}(t) = e^{\lambda_i(t-1)}$  et par indépendance  $G_{Y_1+\dots+Y_n}(t) = \prod_{i=1}^n G_{Y_i}(t) = \exp(\sum_{i=1}^n (\lambda_i(t-1)))$  donc  $Y_1 + \dots + Y_n$  suit  $\mathcal{P}(\sum_{i=1}^n \lambda_i)$ .

Donc ici  $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$ .

d)  $\{X_i = Y_i\} = \{X_i = Y_i = 0\} \sqcup \{X_i = Y_i = 1\}$ . Mais par déf. de  $X_i$ ,  $X_i = Y_i = 0$  équivaut à  $Y_i = U_i = 0$  et par indépendance  $\mathbb{P}(Y_i = U_i = 0) = \mathbb{P}(Y_i = 0) \cdot \mathbb{P}(U_i = 0) = (1 - \frac{\lambda}{n})$

D'autre part  $\mathbb{P}(X_i = Y_i = 1) = \mathbb{P}(Y_i = 1) = \frac{\lambda}{n} e^{-\frac{\lambda}{n}}$

Au total  $\mathbb{P}(X_i = Y_i) = (1 - \frac{\lambda}{n}) + \frac{\lambda}{n} e^{-\frac{\lambda}{n}}$  et donc  $\mathbb{P}(X_i \neq Y_i) = \frac{\lambda}{n} (1 - e^{-\lambda/n})$

Là un peu d'analyse gentille montre que  $\frac{\lambda}{n} (1 - e^{-\lambda/n}) \leq \frac{\lambda^2}{n^2}$ . En fait c'est le a).

e)

Comme  $X = X_1 + \dots + X_n$  et  $Y = Y_1 + \dots + Y_n$ , si  $X(\omega) \neq Y(\omega)$  alors en particulier il existe un  $i$  tel que  $X_i(\omega) \neq Y_i(\omega)$ .

Donc  $\{X \neq Y\} \subset \bigcup_{i=1}^n \{X_i \neq Y_i\}$  donc  $\mathbb{P}(X \neq Y) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \neq Y_i) \leq \frac{\lambda^2}{n}$  d'après la question précédente.

f) Comme l'énoncé du théorème ne dépend que des lois de  $X$  et  $Y$ , on peut prendre  $X$  et  $Y$  comme définies dans les questions précédentes, qui vérifient bien les hyp. du théorème.

Par 1) c)  $d(X, Y) \leq \mathbb{P}(X \neq Y)$ , et avec la question précédente on a l'inégalité du théorème, appelée **inégalité de Le Cam**.

3) a) Pour  $n \rightarrow +\infty$ , le majorant  $\lambda^2/n$  tend vers zéro, donc chaque terme  $P(X = k) - P(Y = k)$  tend vers zéro.

On retrouve le théorème d'approximation de Poisson, pour  $X \sim \mathcal{B}(n, \lambda/n)$  chaque  $P(X = k)$  tend vers  $P(Y = k)$  où  $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$ .

b) Ce que donne l'inégalité de Le Cam est une majoration uniforme de la vitesse de convergence puisque notamment pour chaque  $k$ ,  $|P(X = k) - P(Y = k)| \leq \lambda^2/n$ . Cela permet donc de dire plus précisément quelle erreur on fait en remplaçant la loi binomiale par une loi de Poisson en fonction de  $\lambda$  et de  $n$ .

**Exercice 3.** a) Comme  $p$  et  $q$  sont continues, le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire s'applique à l'E.D. de l'énoncé : si on fixe un  $x_0 \in \mathbb{R}$ , pour chaque couple  $(y_0, v_0) \in \mathbb{K}^2$ , il existe une unique  $y \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}$  telle que  $(y(x_0), y'(x_0)) = (y_0, v_0)$ .

Ainsi l'application  $\mathcal{S}_{\mathbb{K}} \rightarrow \mathbb{K}^2, y \mapsto (y(x_0), y'(x_0))$  est une bijection, et comme elle est évidemment linéaire, c'est un *isomorphisme d'e.v.*

Ainsi :  $\boxed{\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{S}_{\mathbb{K}} = 2}$

b) (i) La linéarité de  $\tau$  est immédiate : si  $(f, g) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ,  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$  alors pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\tau(\lambda f + \mu g)(t) = (\lambda f + \mu g)(t+T) = \lambda f(t+T) + \mu g(t+T)$  par définition des loi sur les fonctions. Donc  $\tau(\lambda f + \mu g) = \lambda \tau(f) + \mu \tau(g)$ .

(ii) Stabilité de  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$  par  $\tau$ . Soit  $y \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ . Alors pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $y''(t+T) + p(t+T)y'(t+T) + q(t+T)y(t+T) = 0$ .

Mais comme  $p$  et  $q$  sont  $T$ -périodiques, on en déduit que  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $y''(t+T) + p(t)y'(t+T) + q(t)y(t+T) = 0$ .

Autrement dit  $\tau(y) : t \mapsto y(t+T)$  vérifie la même E.D. que  $y$ , i.e.  $\tau(y) \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ .

c) On considère les deux solutions  $y_1$  et  $y_2$  aux pb. de Cauchy définis par l'E.D. et  $y_1(0) = 1$ ,  $y_1'(0) = 0$  resp.  $y_2(0) = 0$  et  $y_2'(0) = 1$ .

Ces deux solutions sont à valeurs réelles (par théorème d'existence et d'unicité dans  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ ) sont trivialement indépendantes aussi bien sur  $\mathbb{R}$  que sur  $\mathbb{C}$ .

Donc  $(y_1, y_2)$  forment une base de  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ .

d) Soit  $\mathcal{B} = (y_1, y_2)$  comme défini au c).

Si on note  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\tau) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ , on a par déf. de  $\tau$  :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} y_1(t+T) & y_2(t+T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \end{pmatrix}$$

En dérivant cette égalité :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} y_1'(t+T) & y_2'(t+T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix}$$

ce qu'on peut écrire encore :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} y_1(t+T) & y_2(t+T) \\ y_1'(t+T) & y_2'(t+T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix}$$

Or, on sait que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , la matrice  $\begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix}$  est *inversible* (son déterminant est le Wronskien), ainsi par exemple en évaluant en 0, on obtient :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} y_1(T) & y_2(T) \\ y_1'(T) & y_2'(T) \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

Ainsi  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\tau_0) \in M_2(\mathbb{R})$  ce qui montre bien que son polynôme caractéristique est à coefficients réels.

**Remarque :** ce qui précède est valable pour toute base  $(y_1, y_2)$  de  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ . Mais si on plus on choisit, comme dit plus haut, que  $y_1(0) = 1$ ,  $y_1'(0) = 0$  et  $y_2(0) = 0$  et  $y_2'(0) = 1$  alors la relation précédente devient :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(T) & y_2(T) \\ y_1'(T) & y_2'(T) \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

- e) Avec la dernière relation obtenue au d), on voit que  $\det(\tau_0) = \det \begin{pmatrix} y_1(T) & y_2(T) \\ y_1'(T) & y_2'(T) \end{pmatrix} = W(T)$  où  $W$  est le Wronskien.

On sait que  $W = \det(y_1, y_2)$  vérifie l'E.D.  $W' = -pW$  et comme  $W(0) = 1$ ,  $W(t) = \exp(-\int_0^t p)$ .

On conclut bien que  $\det(\tau_0) = W(T) = \exp(-\int_0^T p)$ .

- f) Désormais  $\det(\tau_0) = 1$  donc le produit des v.p. fait 1.

- i) Si les v.p. sont complexes conjuguées, on les note  $\lambda$  et  $\bar{\lambda}$ , comme le produit des v.p. fait 1, on a  $\lambda\bar{\lambda} = 1$  donc les v.p. sont de module 1.

Alors dans  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ , on peut considérer une base  $(z_1, z_2)$  de vect. propres pour  $\tau_0$  et toutes les  $y \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}$  s'écrivent  $y = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2$ .

Alors pour tout  $x \in [0, T]$  et tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $y(x+nT) = \alpha_1 \lambda_1^n z_1(x) + \alpha_2 \lambda_2^n z_2(x)$  avec  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  les deux v.p. de module 1.

Mais alors en notant  $M_1$  et  $M_2$  un majorant de  $|z_1|$  resp  $|z_2|$  sur  $[0, T]$ , on a  $|y| \leq |\alpha_1| M_1 + |\alpha_2| M_2$  sur  $\mathbb{R}$ .

- ii) Notons  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  les deux v.p. réelles distinctes de  $\tau_0$ . Comme  $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ , on peut choisir SRdG  $|\lambda_1| < 1 < |\lambda_2|$ . On note encore  $z_1$  et  $z_2$  des vecteurs propres de  $\tau_0$  pour  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .

Alors pour tout  $y \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ ,  $\exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $y(x) = \lambda_1 z_1(x) + \lambda_2 z_2(x)$ .

De même pour tout  $x \in [0, T]$  et tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $y(x+nT) = \alpha_1 \lambda_1^n z_1(x) + \alpha_2 \lambda_2^n z_2(x)$ .

Mais si  $\alpha_1 \neq 0$ ,  $\lambda_1^n z_1(x) \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} +\infty$  et  $2\lambda_2^n z_2(x) \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} 0$  donc par somme si  $\alpha_1 \neq 0$ ,  $y(x+nT) \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} +\infty$  donc  $y$  est *non bornée*.

De même si  $\alpha_2 \neq 0$ ,  $y(x+nT) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  donc  $y$  est *non bornée*.

Donc la seule fonction bornée dans  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$  est celle pour laquelle  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  i.e. la fonction nulle.

iii) Comme  $\tau_0$  possède une seule valeur propre  $\lambda \in \{-1, 1\}$ , et que  $\tau_0 \neq \pm \text{id}$ , on sait que  $\tau_0$  n'est pas diagonalisable.

Dans ce cas, on peut écrire la matrice de  $\tau_0$  dans une base  $(z_1, z_2)$  où le premier vecteur est propre sous la forme  $\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  avec  $\mu \neq 0$ .

Si  $\lambda = 1$ , on a  $\tau_0(z_1) = z_1$  i.e.  $\forall t \in \mathbb{R}, z_1(t+T) = z_1(t)$  donc  $z_1$  est  $T$ -périodique.

Si  $\lambda = -1$ , on a  $\tau_0(z_1) = -z_1$ , i.e.  $\forall t \in \mathbb{R}, z_1(t+T) = -z_1(t)$  donc  $z_1$  est  $T$ -antipériodique donc  $z_1$  est  $2T$ -périodique.

Donc dans les deux cas, en posant  $\varphi = z_1$ , on a une solution périodique donc bornée (car continue périodique sur  $\mathbb{R}$ ) et tous les éléments de la droite  $\mathbb{C}\varphi$  sont aussi périodiques et donc bornés.

Par récurrence immédiate, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\text{Mat}_{(z_1, z_2)}(\tau_0^n) = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\mu\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$

Pour  $y \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}$  quelconque, qu'on écrit  $y = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2$ , on a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, y(x+nT) &= \alpha_1 z_1(x+nT) + \alpha_2 z_2(x+nT), \\ &= \alpha_1 \lambda^n z_1(x) + \alpha_2 (n\mu\lambda^{n-1} z_1(x) + \lambda^n z_2(x)) \quad (\dagger) \end{aligned}$$

Si  $y \notin \text{Vect}(\varphi) = \text{Vect}(z_1)$  on a  $\alpha_2 \neq 0$  et comme  $\mu \neq 0$ ,  $|n\mu\lambda^{n-1} z_1(x)| = n|\mu||z_1(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .

Comme les autres termes de  $(\dagger)$  sont bornés on en déduit bien que si  $\alpha_2 \neq 0$ ,  $y(x+nT) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .

Cela montre bien que *les seules* solutions bornées dans  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$  sont les éléments de  $\text{Vect}(\varphi)$ .

iv) Si  $\tau_0 = \pm \text{id}$  tout élément de  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$  est périodique de période  $T$  ou  $2T$ .

#### Exercice 4. 4.1. Résolvante :

- Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire dit que  $\Phi_{t_0}$  est un isomorphisme d'e.v.
- Soit  $V \in M_{n,1}(\mathbb{K})$  quelconque, et  $X$  l'unique solution de  $(E)$  telle que  $X(t_0) = V$ .  
D'un côté  $R(t_2, t_0).V = X(t_2)$ , de l'autre côté  $R(t_2, t_1).R(t_1, t_0).V = R(t_2, t_1).X(t_1) = X(t_2)$ .  
Ainsi  $R(t_2, t_0).V = R(t_2, t_1).R(t_1, t_0).V$  pour tout vecteur  $V$ .
- On fixe un vecteur  $V \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ . On note  $X$  la solution de  $(E)$  telle que  $X(t_0) = V$ .  
Alors  $\frac{d}{dt}(R(t, t_0)).V = \frac{d}{dt}(R(t, t_0).V) = \frac{d}{dt}(X(t)) = A(t)X(t) = A(t).R(t, t_0).V$ .  
Cette propriété étant vraie pour tout vecteur  $V$ , on a la conclusion annoncée.
- Par déf. de  $R(t, t_0)$  on a bien  $R(t_0, t_0) = I_n$ . D'autre part, d'après la question précédente,  $t \mapsto R(t, t_0)$  vérifie bien l'E.D. à inconnue matricielle demandée.  
Pour l'unicité, il suffit de se rappeler que le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire est donnée pour toutes les E.D.L à solutions dans un e.v.n. de dim. finie donc aussi pour l'E.D. à inconnue matricielle donnée ici.

#### 4.2. Application aux systèmes linéaires homogènes à coefficients périodiques

- Bien sûr si  $X$  est  $T$ -périodique, alors, en particulier  $X(0) = X(T)$ .  
Réciproquement, supposons que  $X(0) = X(T)$ . Soit  $Z$  définie par  $\forall t \in \mathbb{R}, Z(t) = X(t+T)$ .  
Comme  $A$  est  $T$ -périodique, pour tout  $t \in \mathbb{R}, X'(t+T) = A(t+T).X(t+T) = A(t).X(t+T)$ .  
Donc  $\forall t \in \mathbb{R}, Z'(t) = A(t).Z(t)$  et  $Z(0) = X(T) = X(0)$ .  
Donc  $Z$  et  $X$  vérifie le même système différentiel linéaire à coefficient continu, avec la même condition initiale, donc par théorème d'unicité de Cauchy-Lipschitz :  $\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = Z(t) = X(t+T)$ .  
Donc  $X$  est bien  $T$ -périodique.

b) Avec les notations du 4.1. l'égalité à montrer s'écrit :

$$R(t+T, 0) = R(t, 0).R(T, 0)$$

Or par le 4.1. b), on sait que  $R(t+T, 0) = R(t+T; T).R(T, 0)$ .

Pour conclure il suffit donc de montrer que :

$$R(t, 0) = R(t+T, T) \quad (*)$$

Or par 4.1. d)  $R(t, 0)$  est solution du problème de Cauchy  $M'(t) = A(t).M(t)$  avec  $M(0) = I_n$ . et  $N(t) := R(t+T, T)$  est solution du problème de Cauchy  $N'(t) = A(t+T)N(t) = A(t)N(t)$  avec  $N(0) = R(T, T) = I_n$ .

On conclut que  $(*)$  est vraie par théorème d'unicité de Cauchy-Lipschitz.

c) (i) Par déf. pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $Y(t+T) = M(t+T).e^{-(T+t)L} = M(t).M(T).e^{-TL}e^{-tL}$  par b).

Par déf. de  $L$ ,  $e^{-TL} = e^{-L_0} = M(T)^{-1}$  donc  $Y(t+T) = M(t).e^{-tL} = Y(t)$ .

(ii) D'abord la fonction  $Y$  est bien définie car les matrices  $M(t)$  et  $\exp(-tL)$  sont inversibles pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , donc  $Y(t) = e^{tL}M(t)^{-1}X(t)$ .

On a ensuite  $X(t) = R(t, 0)X(0) = M(t)X(0)$  et  $Y(t) = e^{tL}M(t)^{-1}M(t)X(0) = e^{tL}X(0)$

Comme  $Y(0) = e^{0L}M(0)^{-1}X(0) = X(0)$ , on conclut bien que  $Y(t) = e^{tL}Y(0)$  donc  $Y$  vérifie bien le système à coefficient constant  $Y' = LY$ .

Ce résultat s'appelle **théorème de Floquet** (iii) Question de synthèse, résultat assez jolie.

Par le (i) et le (ii),  $(E)$  admet une solution  $T$ -périodique non nulle si, et seulement si, l'équation à coefficient constant  $Y'(t) = L.Y(t)$  admet une telle solution  $T$ -périodique.

Or par le a), appliqué à cette équation, ceci équivaut à l'existence d'une solution  $Y$  non nulle telle  $Y(T) = Y(0)$ .

Or pour les équations à coefficients constant, on sait que  $Y(t) = \exp(tL)Y(0)$ .

Donc la condition  $Y(T) = Y(0)$  équivaut à  $Y(T) = \exp(TL)Y(0)$  i.e. à  $Y(0) \in \ker(\exp(TL) - \text{id})$  ce qui signifie bien, avec  $Y(0) \neq 0$ , que  $\exp(TL)$  admet 1 comme valeur propre.