

D.M. 15 : Proba et Exp. matricielle, solution

Mini problème 1 : théorème de Beppo-Levi-Gourbière, appelé plus communément théorème de convergence monotone

- 1) Comme la suite des v.a.d. (X_n) est croissante, on en déduit, par croissance de l'espérance, que la suite réelle $(\mathbb{E}(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
 Par théorème de la limite monotone, la suite $(\mathbb{E}(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$ admet donc une limite ℓ dans $\overline{\mathbb{R}^+}$.
 En outre comme $\ell = \sup \mathbb{E}(X_n)$ et que $\mathbb{E}(X)$ majore la suite $(\mathbb{E}(X_n))$, on conclut que

$$\ell \leq \mathbb{E}(X).$$

- 2) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité des v.a. : $X_{n+1} \geq X_n$, entraîne l'inclusion d'événements :

$$A_n := \{X_n \geq M\} \subset A_{n+1} := \{X_{n+1} \geq M\}.$$

On en déduit que la suite des $(\mathbb{P}(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante dans $\mathbb{R}^+$.

Mieux, par théorème de continuité croissante des probabilités, on sait que :

$$\mathbb{P}(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

On note donc $\ell' = \mathbb{P}(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n)$, et on veut montrer que

$$\ell' \geq \mathbb{P}(X = +\infty) \quad (*).$$

Pour cela, il suffit de montrer que :

$$\{X = +\infty\} \subset \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n. \quad (**)$$

Or si $\omega \in \Omega$ est tel que $X(\omega) = +\infty$ cela signifie que $X_n(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ donc il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $X_{n_0}(\omega) \geq M$ et donc $\omega \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$.

On vient donc de prouver l'inclusion $(**)$ qui prouve elle-même l'inégalité $(*)$ demandée.

- b) D'après l'inégalité de Markov pour la v.a.d. *positive* X_n , on sait que :

$$M \mathbb{P}(X_n \geq M) \leq \mathbb{E}(X_n).$$

Comme $\mathbb{E}(X_n) \leq \ell$, et $\mathbb{P}(X_n \geq M) = \mathbb{P}(A_n)$, on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, M \mathbb{P}(A_n) \leq \ell$$

En passant à la limite dans cette inégalité, on a :

$$M \cdot \ell' \leq \ell,$$

et avec l'inégalité $\mathbb{P}(X = +\infty) \leq \ell'$, on conclut bien que :

$$M \cdot \mathbb{P}(X = +\infty) \leq \ell.$$

- c) L'inégalité prouvée au b) étant vraie pour tout $M > 0$, en faisant tendre M vers $+\infty$, on a, avec le b) et $\mathbb{P}(X = +\infty) > 0$ que $\ell = +\infty$. Donc

$$\mathbb{E}(X_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \quad (1)$$

D'autre part comme $\mathbb{P}(X = +\infty) \neq 0$, on a aussi

$$\mathbb{E}(X) = +\infty \quad (2)$$

Avec (1) et (2), on a bien $\boxed{\mathbb{E}(X_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X)}$ dans ce cas.

3) a) Comme $a \in]0, 1[$, pour chaque $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega) \in]0, +\infty[$, on sait que

$$aX(\omega) < X(\omega)$$

et comme $X_n(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} X(\omega)$, on sait donc qu'il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0, X_n(\omega) > aX(\omega).$$

D'autre part, si $X(\omega) = 0$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n(\omega) = 0$ et donc $X_n(\omega) \geq aX(\omega)$.

Ainsi :

$$\{\omega \in \Omega, X(\omega) < +\infty\} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X_n \geq aX).$$

Comme $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega, X(\omega) < +\infty\}) = 1$ par hypothèse, on conclut que :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X_n \geq aX)\right) = 1 \quad (1)$$

Or ici aussi $A_n \subset A_{n+1}$ donc par continuité croissante des probabilités :

$$\mathbb{P}(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \quad (2)$$

Avec (1) et (2), on a bien montré que $\boxed{\mathbb{P}(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1}$.

b) Idée :

$$\mathbb{P}((X = x) \cap A_n) = \mathbb{P}(X = x) + \mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}((X = x) \cup A_n) \quad (1)$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset (X = x) \cup A_n$, donc $\mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}((X = x) \cup A_n)$, et comme on a déjà vu à la question précédente que $\mathbb{P}(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ (2), on en déduit que :

$$\mathbb{P}((X = x) \cup A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \quad (3)$$

Avec (2) et (3) dans (1), on conclut que :

$$\boxed{\mathbb{P}((X = x) \cap A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X = x) + 1 - 1 = \mathbb{P}(X = x)}$$

c) **N.B.** Bien sûr $\mathbb{E}(X \mathbf{1}_{A_n}) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}((X = x) \cap A_n)$ mais justement, on ne sait pas si

on peut passer à la limite terme à terme dans cette somme, c'est un peu ce qu'on veut montrer ! Donc on va ruser pour se ramener à des sommes *finies*.

Déjà, on sait par croissance de $\mathbb{E}$, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}(X \mathbf{1}_{A_n}) \leq \mathbb{E}(X) \quad (1)$$

On veut donc montrer l'inégalité inverse pour la limite.

Soit $\lambda < \mathbb{E}(X)$, on veut montrer qu'il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\mathbb{E}(X \mathbf{1}_{A_n}) \geq \lambda$.

Or par déf. de l'espérance $\mathbb{E}(X)$ comme un sup. (somme d'une famille sommable), il existe un sous-ensemble *fini*, $I \subset X(\Omega)$ tel que $\sum_{x \in I} x \mathbb{P}(X = x) > \lambda$.

Par somme *finie* de limites, on a $\sum_{x \in I} x \mathbb{P}((X = x) \cap A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{x \in I} x \mathbb{P}(X = x)$

Donc on a un n_0 tel que $\forall n \geq n_0, \sum_{x \in I} x \mathbb{P}((X = x) \cap A_n) > \lambda$.

A fortiori

$$\mathbb{E}(X \mathbf{1}_{A_n}) := \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}((X = x) \cap A_n) > \lambda$$

ce qui donne la conclusion.

d) Soit $\omega \in \Omega$. Par déf. de l'événement $A_n = \{X_n \geq aX\}$, on sait que

$$\text{si } \omega \in A_n, X_n(\omega) \geq aX(\omega) = aX(\omega)\mathbf{1}_{A_n}(\omega).$$

D'autre part, si $\omega \notin A_n$, on a $aX(\omega)\mathbf{1}_{A_n}(\omega) = 0$ et comme $X_n \geq 0$, on a encore

$$\text{si } \omega \notin A_n, X_n(\omega) \geq aX(\omega)\mathbf{1}_{A_n}(\omega) = 0.$$

D'où l'inégalité :

$$\boxed{X_n \geq aX\mathbf{1}_{A_n}}.$$

e) Par croissance de $\mathbb{E}$, on sait maintenant que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $a \in]0, 1[$,

$$\mathbb{E}(X) \geq \mathbb{E}(X_n) \geq a\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{A_n})$$

(première inégalité par $X_n \leq X$ et la seconde par d).

En passant à la limite pour $n \rightarrow +\infty$, par 1) et 3)c), on a :

$$\mathbb{E}(X) \geq \ell \geq a\mathbb{E}(X),$$

et cela pour tout $a \in]0, 1[$.

En faisant tendre a vers 1, on a l'égalité $\boxed{\ell = \mathbb{E}(X)}$.

Mini problème 2 : à propos de l'exponentielle matricielle

1) Cas où A et B commutent à $[A, B]$:

a) *Au brouillon, on commence par $A^2B - BA^2 = A(AB - BA) + ABA - BA^2 = A(AB - BA) + (AB - BA)A = AC + CA = 2AC$ puisque A et C commutent.*

Notons $H(k)$ la propriété : $A^k B - BA^k = kCA^{k-1}$.

• $H(1)$ est vraie par déf. $AB - BA = C$;

• Supposons $H(k)$ vraie pour un $k \geq 1$. Alors $A^{k+1}B - BA^{k+1} = A(A^k B - BA^k) + ABA^k - BA^{k+1} = A(A^k B - BA^k) + (AB - BA)A^k$.

Donc par $H(k)$, on a $A^{k+1}B - BA^{k+1} = AkA^{k-1}C + CA^k = (k+1)CA^k$. Et la réc. est établie.

On vient de montrer que $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}, A^k B - BA^k = kCA^{k-1}}$.

b) Par C.L. des équations du a) et passage à la limite (continuité du produit), on obtient

$$\text{que : } e^{tA}B - Be^{tA} = \sum_{k=0}^{+\infty} kt^k C \frac{A^{k-1}}{k!} = t \sum_{k=1}^{+\infty} C \frac{tA^{k-1}}{(k-1)!} = tCe^{tA}.$$

$$\text{Donc } \boxed{e^{tA}B - Be^{tA} = tCe^{tA}}.$$

c) On peut dériver $t \mapsto M(t)$ comme un produit :

$$M'(t) = -(A+B)e^{-t(A+B)}e^{tA}e^{tB} + e^{-t(A+B)}Ae^{tA}e^{tB} + e^{-t(A+B)}e^{tA}Be^{tB}$$

(attention, comme A et B ne commutent pas, on ne peut pas permuter les facteurs des produits ni simplifier les exponentielles).

Néanmoins $e^{-t(A+B)}$ commute avec $(A+B)$ donc en mettant $e^{-t(A+B)}$ en facteur à gauche et e^{tB} en facteur à droite on a :

$$M'(t) = e^{-t(A+B)} \left(-(A+B)e^{tA} + Ae^{tA} + e^{tA}B \right) e^{tB}.$$

Donc en simplifiant le Ae^{tA} , on obtient :

$$M'(t) = e^{-t(A+B)} (-Be^{tA} + e^{tA}B) e^{tB}.$$

Avec le résultat de la question précédente, on conclut que :

$$M'(t) = te^{-t(A+B)}Ce^{tA}e^{tB}.$$

Enfin comme C commute à A et B , elle commute à $A+B$ et donc à $\exp(A+B)$ et donc $M'(t) = tCe^{-t(A+B)}e^{tA}e^{tB} = tCM(t)$.

D'où l'E.D vérifiée par M : $\boxed{M'(t) = tCM(t)}$.

Mais alors on conclut que $M(t) = \exp(t^2C/2)M(0)$. Et $M(0) = I_n$ donc $\boxed{M(t) = \exp(t^2C/2)}$.

d) Il suffit de prendre $t = 1$ dans l'égalité précédente.

2) a)

Ceci est un résultat important, déjà vu sur la planche S2 dans le cas particulier où (C_p) est constante égale à C , mais la preuve est la même. On s'intéresse toujours à la différence entre la somme donnée par la formule du binôme et la somme partielle d'ordre n de la série exp.

Par continuité de exp, on sait que $\exp(C_p) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \exp(C)$.

Il suffit donc de montrer que :

$$\exp(C_p) - \left(I + \frac{C_p}{p}\right)^p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0 \quad (\dagger)$$

Or, en choisissant une norme d'algèbre dans $M_n(\mathbb{C})$:

$$\begin{aligned} \left\| \exp(C_p) - \left(I + \frac{C_p}{p}\right)^p \right\| &= \left\| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{C_p^k}{k!} - \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} C_p^k \right\| \\ &= \left\| \sum_{k=0}^p \left(\frac{1}{k!} - \binom{p}{k} \frac{1}{p^k} \right) C_p^k + \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{C_p^k}{k!} \right\| \quad (1) \end{aligned}$$

Or pour chaque $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$:

$$\frac{1}{k!} - \binom{p}{k} \frac{1}{p^k} \geq 0 \quad (2)$$

En effet, $\binom{p}{k} \frac{1}{p^k} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{p(p-1)\dots(p-(k-1))}{p^k} \leq \frac{1}{k!}$ d'où (2).

Avec (1), on obtient, par l'inégalité triangulaire et la positivité donnée par (2) et la multiplicativité de la norme :

$$\begin{aligned} \left\| \exp(C_p) - \left(I + \frac{C_p}{p}\right)^p \right\| &\leq \sum_{k=0}^p \left(\frac{1}{k!} - \binom{p}{k} \frac{1}{p^k} \right) \|C_p\|^k + \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{\|C_p\|^k}{k!} \\ &= \exp(\|C_p\|) - \left(1 + \frac{\|C_p\|}{p}\right)^p \quad (2) \end{aligned}$$

la dernière égalité s'obtenant en reprenant le calcul conduisant à (1) en sens inverse, cette fois avec les nombres $\|C_p\|$ au lieu des matrices C_p .

Dans (2), on sait que :

$$\exp(\|C_p\|) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \exp(\|C\|) \quad (3)$$

Montrons que

$$\left(1 + \frac{\|C_p\|}{p}\right)^p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \exp(\|C\|) \quad (4)$$

L'avantage de (4) par rapport à la question initiale est qu'il s'agit d'une limite de suite réelles et là un petit D.L nous tire d'affaire. En effet :

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{\|C_p\|}{p}\right)^p &= \exp(p \ln(1 + \frac{\|C_p\|}{p})) \\
&= \exp(p \ln\left(1 + \frac{\|C\|}{p} + o\left(\frac{1}{p}\right)\right)) \\
&= \exp(\|C\| + o(1)).
\end{aligned}$$

Ainsi, on a prouvé (4) et (3), ce qui dans (2) donne que le majorant tend vers zéro et donne la conclusion.

b) La dérivabilité de $u \mapsto e^{uA}$ donne un DL₁ pour cette fonction en 0 : $e^{uA} = I + Au + o_{u \rightarrow 0}(u)$.

Donc pour t fixé et $p \rightarrow +\infty$,

$$e^{\frac{tA}{p}} = I + \frac{tA}{p} + o_{p \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{p}\right).$$

De même avec $e^{\frac{tB}{p}}$ et par produit de D.L. : $e^{\frac{tA}{p}} e^{\frac{tB}{p}} = \left(I + \frac{tA}{p} + o\left(\frac{1}{p}\right)\right)\left(I + \frac{tB}{p} + o\left(\frac{1}{p}\right)\right)$

Donc $e^{\frac{tA}{p}} e^{\frac{tB}{p}} = I + \frac{t(A+B)}{p} + o\left(\frac{1}{p}\right)$. (Autre méthode : faire le D.L.₁ de $\varphi : t \mapsto \exp(tA) \cdot \exp(tB)$ avec Taylor).

$$\text{Donc } C_p = p\left(\frac{t(A+B)}{p} + o\left(\frac{1}{p}\right)\right) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} t(A+B).$$

c) Par définition de (C_p) , on a :

$$\left(e^{\frac{tA}{p}} \cdot e^{\frac{tB}{p}}\right)^p = \left(I + \frac{C_p}{p}\right)^p$$

Avec le b) et le a), on conclut que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(e^{\frac{tA}{p}} \cdot e^{\frac{tB}{p}}\right)^p = e^{t(A+B)}$.

d) Cette fois, on a besoin d'un DL₂ de $e^{uA} = I + uA + \frac{u^2}{2}A^2 + o_{u \rightarrow 0}(u^2)$.

Avec ce DL₂, par produit on a pour t fixé et $p \rightarrow +\infty$:

$$e^{\frac{tA}{p}} e^{\frac{tB}{p}} = I + \frac{t(A+B)}{p} + \frac{t^2}{p^2} \left(\frac{A^2}{2} + AB + \frac{B^2}{2}\right) + o\left(\frac{1}{p^2}\right).$$

De même pour $e^{-\frac{tA}{p}} e^{-\frac{tB}{p}} = I - \frac{t(A+B)}{p} + \frac{t^2}{p^2} \left(\frac{A^2}{2} + AB + \frac{B^2}{2}\right) + o\left(\frac{1}{p^2}\right)$.

En faisant le produit de ces deux D.L. les termes en $1/p$ disparaissent :

$$\begin{aligned}
e^{\frac{tA}{p}} e^{\frac{tB}{p}} e^{-\frac{tA}{p}} e^{-\frac{tB}{p}} &= I + 2\left(\frac{A^2}{2} + AB + \frac{B^2}{2}\right) \frac{t^2}{p^2} - \frac{t^2(A+B)^2}{p^2} + o\left(\frac{1}{p^2}\right) \\
&= I_n + (AB - BA) \frac{t^2}{p^2} + o\left(\frac{1}{p^2}\right) \quad (1)
\end{aligned}$$

En adaptant l'idée des questions précédentes et en notant :

$$D_p := p^2 \left(e^{\frac{tA}{p}} e^{\frac{tB}{p}} e^{-\frac{tA}{p}} e^{-\frac{tB}{p}} - I_n \right)$$

on vient de montrer, avec (1), que :

$$D_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} [A, B] = AB - BA \quad (2)$$

Alors,

$$\left(e^{\frac{tA}{p}} e^{\frac{tB}{p}} e^{-\frac{tA}{p}} e^{-\frac{tB}{p}}\right)^{p^2} = \left(I_n + \frac{D_p}{p^2}\right)^{p^2} \quad (3)$$

Or en définissant une suite (Δ_p) telle que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \llbracket p^2, (p+1)^2 - 1 \rrbracket$, $\Delta_k = D_p$, on a $\Delta_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} [A, B]$ par (2) et :

$$\left(I_n + \frac{D_p}{p^2}\right)^{p^2} = \left(I_n + \frac{\Delta_{p^2}}{p^2}\right)^{p^2} \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} \exp([A, B]) \quad (4)$$

car $\left(I_n + \frac{\Delta_{p^2}}{p^2}\right)^{p^2}$ est suite extraite de $\left(I_n + \frac{\Delta_p}{p}\right)^p$ à laquelle on peut appliquer le a).

Avec (3) et (4) on a la conclusion.

Remarque : la stratégie d'utiliser le a) permet d'éviter de faire intervenir un log matriciel, qu'on peut pourtant définir via son D.S.E. matriciel dans voisinage de I_n de rayon 1 pour une norme d'algèbre et qui donnerait une autre preuve de ces formules et d'autres.