

D.M. 15 : Proba et Exp. matricielle.

Pour le vendredi 18 Mars

Mini problème 1 : théorème de Beppo-Levi-Gourbière

Soit (X_n) une suite *croissante* de v.a.d. positives qui converge simplement vers une v.a.d. X . On se propose de démontrer que la suite $(\mathbb{E}(X_n))$ tend vers $\mathbb{E}(X)$

- 1) Montrer que la suite $(\mathbb{E}(X_n))$ possède dans $\overline{\mathbb{R}_+}$ une limite $\ell \leq \mathbb{E}(X)$.
- 2) On suppose dans cette question que $\mathbb{P}(X = +\infty) > 0$.
On fixe $M \in \mathbb{R}_+^*$ et on pose $A_n = (X_n \geq M)$.
 - a) Montrer que la suite $(\mathbb{P}(A_n))$ converge vers une limite $\ell' \geq \mathbb{P}(X = +\infty)$.
 - b) En déduire que $M \cdot \mathbb{P}(X = +\infty) \leq \ell$.
 - c) Conclure pour ce cas.
- 3) On suppose maintenant que $\mathbb{P}(X = +\infty) = 0$. On fixe $a \in]0, 1[$ et on pose $A_n = (X_n \geq aX)$.
 - a) Montrer que $\mathbb{P}(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.
 - b) En déduire que pour tout $x \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}((X = x) \cap A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X = x)$.
 - c) En déduire que $\mathbb{E}(X \mathbf{1}_{A_n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X)$. *Indication* : revenir aux définitions.
 - d) Comparer X_n et $aX \mathbf{1}_{A_n}$.
 - e) Conclure pour ce cas.

Mini problème 2 : à propos de l'exponentielle matricielle

- 1) **Le cas où A et B ne commutent pas forcément, mais commutent à $[A, B]$**
Soient A et B deux matrices dans $M_n(\mathbb{C})$. On pose $C = AB - BA$.
On suppose que A et B commutent toutes les deux à C .
 - a) Exprimer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k B - B A^k$ en fonction de C et A .
 - b) En déduire une expression de $e^{tA} B - B e^{tA}$ en fonction de C et A .
 - c) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $M(t) = e^{-t(A+B)} e^{tA} e^{tB}$. Exprimer $M(t)$ en fonction de C et t .
 - d) En déduire que, avec l'hypothèse de l'exercice, l'égalité de Glauber suivante :

$$\exp(A + B) = \exp(A) \cdot \exp(B) \exp\left(-\frac{1}{2}(AB - BA)\right)$$

- 2) **Un résultat général d'approximation pour $e^{t(A+B)}$**
 - a) Montrer si $(C_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite de matrices dans $M_n(\mathbb{R})$ telle que $C_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} C$ alors

$$\left(I + \frac{C_p}{p}\right)^p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \exp(C).$$

- b) Soit $t \in \mathbb{R}$, et $(A, B) \in M_n(\mathbb{R})^2$. Soit $C_p = p(e^{\frac{tA}{p}} \cdot e^{\frac{tB}{p}} - I_n)$. Déterminer la limite de C_p quand $p \rightarrow +\infty$.
- c) En déduire que si $(A, B) \in M_n(\mathbb{R})^2$ et $t \in \mathbb{R}$, alors $e^{t(A+B)} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(e^{\frac{tA}{p}} \cdot e^{\frac{tB}{p}}\right)^p$.
- d) Montrer de même que $e^{t^2(AB-BA)} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(e^{-\frac{tA}{p}} e^{-\frac{tB}{p}} e^{+\frac{tA}{p}} e^{+\frac{tB}{p}}\right)^{p^2}$.