

Exercice 1. a) Montrer que si a et b dans $\mathbb{R}^{++}$ sont tels que $1/a + 1/b = 1$ alors pour tout $(u, v) \in (\mathbb{R}^{++})^2$,

$$uv \leq \frac{u^a}{a} + \frac{v^b}{b}$$

b) Dédurre du a) que si X et Y sont deux v.a. admettant un moment d'ordre k alors pour tout $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$, $X^i \cdot Y^{k-i}$ admet une espérance et conclure que $(X + Y)$ admet un moment d'ordre k .

En déduire aussi que si on note $\mathcal{L}^k(\Omega, \mathbb{R})$ l'ensemble des v.a. admettant un moment d'ordre k , alors $\mathcal{L}^k(\Omega, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ -e.v.

Exercice 2. Soit X une v.a. définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et admettant un moment d'ordre 2.

Démontrer que :

$$\mathbb{E}(X) \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2) \cdot \mathbb{P}(X > 0)}$$

Exercice 3 (Inégalité de Jensen en proba). Soit X une v.a. réelle admettant une espérance et f sur une fonction concave sur un intervalle I contenant $X(\Omega)$. On suppose aussi que $f(X)$ admet une espérance.

Montrer alors que $\mathbb{E}(f(X)) \leq f(\mathbb{E}(X))$.

Indication – Si x_0 est un réel dans I , expliquer qu'il existe une fonction affine g telle que $g(x_0) = f(x_0)$ et telle que $\forall x \in X(\Omega)$, $g(x) \geq f(x)$.

En écrivant $g(x) = a(x - x_0) + f(x_0)$ et en choisissant $x_0 = E(X)$, conclure, en appliquant les propriétés de l'espérance.

Exercice 4. On considère l'univers $\Omega = S_n$ de toutes les permutations de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$, muni de la probabilité uniforme. Pour chaque σ dans S_n , on note $X(\sigma)$ le nombre de points fixes de σ .

a) Calculer $\mathbb{E}(X)$ autrement dit le nombre moyen de points fixes d'une permutation $\sigma \in S_n$.

Indication – Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pourra considérer l'indicatrice de l'événement $A_i : \llcorner i \text{ est un point fixe de la permutation tirée.} \gg$

Version plus mondaine : n couples mariés arrivent à un bal et chaque cavalier choisit une cavalière aléatoirement. Quel est le nombre moyen de couples mariés qui vont danser ensemble ?

b) Calculer aussi $\mathbb{V}(X)$.

c) Retour sur la loi (plus difficile) : à l'aide par exemple du principe d'inclusion-exclusion (ou formule de Poincaré, ou du crible, qui est un exercice en soi, donnant $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i)$ en fonction des probas des différentes intersections des A_i), expliciter la loi de X (chaque $P(X = k)$ s'écrira comme une somme). Ce calcul cependant ne permet pas facilement d'en déduire l'espérance (et a fortiori la variance) de X .

d) Comportement asymptotique

Idée : si les v.a. $X_i = 1_{A_i}$ introduite dans l'indication du a) étaient indépendantes, alors X suivrait une loi $\mathcal{B}(n, 1/n)$ et quand $n \rightarrow +\infty$, la loi de X convergerait avec une loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$. (résultat sur la loi limite de loi binomiale ici avec $n \times p_n = n \times 1/n = 1$.)

Ici, il n'est pas vrai que les v.a. X_i sont indépendantes (cf. le calcul du b)), mais :

montrer qu'il est quand même vrai que la loi de X converge, quand $n \rightarrow +\infty$, vers une loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$

Exercice 5. A l'aide de l'I.B.T. montrer que si $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=n+1}^{3n-1} \binom{4n}{k} \geq \frac{n-1}{n} 2^{4n}$.

Exercice 6 (Processus de Galton-Watson, Centrale PSI 2015). On observe des virus qui se reproduisent tous selon la même loi avant de mourir : un virus donne naissance en une journée à X virus, où X est une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ et meurt. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $p_k = \mathbb{P}(X = k)$. On suppose $p_1 > 0$ et $p_0 + p_1 < 1$. On note f la fonction génératrice de X .

On part au jour zéro de $X_0 = 1$ virus. Au premier jour, on a alors X_1 virus où X_1 est une v.a. qui suit la loi de X .

Chacun de ces X_1 virus évolue alors indépendamment des autres virus et se reproduit selon la même loi avant de mourir ce qui conduit à X_2 virus au deuxième jour. Et le processus continue de la sorte.

On note $u_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$.

a) Calculer u_0, u_1 .

- b) Montrer que la suite (u_n) converge.
- c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
- d) Suivant la valeur de $\mathbb{E}(X)$ discuter de la limite de (u_n) et interpréter le résultat en termes probabilistes.

Indication – On pourra remarquer que $\varphi : x \mapsto f(x) - x$ est convexe sur $[0, 1]$ et discuter suivant le signe de $\varphi'(1)$ (si cette dérivée existe dans $\mathbb{R}$).

- e) Estimation de la vitesse de convergence de (u_n) : on note $\varepsilon_n = 1 - u_n$.
 - i) Dans le cas où $\mathbb{E}(X) = 1$ (le cas critique) : Montrer que $\frac{1}{\varepsilon_{n+1}} - \frac{1}{\varepsilon_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} f''(1)$ (si cette dérivée seconde existe). Et dans ce cas que $1 - u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n f''(1)}$. Traduire ce résultat en termes probabilistes.
 - ii) Dans le cas où $\mathbb{E}(X) < 1$ (le cas sous-critique) : Montrer que $\sum \varepsilon_n$ est absolument convergente et en déduire l'absolue convergence de $\sum \ln \left(\frac{m^{-(n+1)} \varepsilon_{n+1}}{m^{-n} \varepsilon_n} \right)$. En déduire enfin l'existence d'un $c > 0$ tel que $1 - u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} c m^{-n}$.

Exercice 7 (Formule de Wald pour les espérances).] Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, de même loi qu'une v.a. X et T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante des précédentes. $(T, X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

On note $S_T = X_1 + \dots + X_T$. On suppose que T et X admettent une espérance. Montrer que $E(S_T) = E(X) \cdot E(T)$.

Exercice 8 (Extrait Centrale MP 2016). On considère une suite (X_n) de v.a. mutuellement indépendantes, à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et telles que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

(Ils s'agit bien sûr de v.a. qui suivent une loi de Bernoulli, mais avec cette normalisation, on parle plutôt de variables de Rademacher).

On note $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

On se propose de démontrer que la suite $\left(\frac{S_n}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers 0, c'est-à-dire qu'il existe un événement négligeable $\mathcal{Z} \in \mathcal{A}$ tel que

$$\forall \omega \in \Omega \setminus \mathcal{Z}, \quad \frac{S_n(\omega)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

(Ce résultat est la loi forte des grands nombres pour ces v.a.)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$U_n = \left(\frac{S_n}{n} \right)^4 \quad \text{et} \quad \mathcal{Z}_n = \left\{ \omega \in \Omega \mid \exists k \geq n, U_k(\omega) \geq \frac{1}{\sqrt{k}} \right\}$$

- a) Montrer que $E(S_n^4) = 3n^2 - 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P\left(U_n \geq \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq \frac{3}{n^{3/2}}$.
- c) Montrer que $\mathcal{Z}_n \in \mathcal{A}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et que $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\mathcal{Z}_n) = 0$.
- d) En considérant $\mathcal{Z} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{Z}_n$, montrer que $\left(\frac{S_n}{n} \right)$ converge presque sûrement vers 0.