Exercice 1 (Généralités sur les v.a.d.)**.** Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et (X_n) une suite de v.a.d. de Ω dans un ensemble E.

a) **Temps d'« arrêt » :** On fixe $x \in E$ et on considère $T_x : \Omega \to \mathbb{N}, \omega \mapsto \min\{n \in \mathbb{N},\ X_n(\omega) = x\}$. Montrer que T_x est une v.a.d. qu'on notera simplement $T_x = \min\{n \in \mathbb{N}, ; X_n = x\}$.

b) **Une sorte de « Composition »** Soit N une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$. On définit X_N par $\forall\, \omega \in \Omega,\ X_N(\omega) := X_{N(\omega)}(\omega)$. Montrer que X_N est une v.a.d.

Exercice 2 (Loi du maximum de n v.a. de loi uniforme)**.** Un correcteur paresseux met « au hasard » une note entre 0 et 20 à chacune de ses n copies. On note X_n la v.a. qui donne la valeur de la note maximale. Déterminer la loi de X_n puis déterminer la limite de cette loi pour $n \to +\infty$ autrement dit pour chaque $k \in [\![0, 20]\!]$, $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = k)$.

indication (méthode pour les max./min) commencer par étudier $\mathbb{P}(X_n \leq k)$.

Exercice 3. Un joueur jette une pièce a priori non équilibrée (qui tombe sur pile avec une proba. p) jusqu'à ce qu'il obtienne « pile ». Si ceci se passe au k-ième lancer, il lance alors k fois un dé équilibré. Il gagne s'il obtient *exactement* une fois un 6. On demande la probabilité pour que le joueur gagne à ce jeu.

Exercice 4 (Loi binomiale négative : Obtention « naturelle » de cette loi)**.** La loi binomiale permet de décrire le nombre de succès qu'on peut obtenir lors d'une série de n expériences de Bernoulli indép. de même paramètre p. On peut considérer le problème inverse, c'est-à-dire essayer de décrire le nombre d'expériences qu'il faut faire pour arriver à obtenir k succès où k est donné.

Clairement si $k = 0$ ce nombre est 0 Si $k = 1$, on cherche en fait l'instant T_1 du premier succès, et on sait que ce temps T_1 suit une loi géométrique. On s'intéresse ici au cas $k \geq 1$.

On fixe un $k \geq 1$ on appelle T_k la v.a. qui donne le temps d'attente du k-ième succès.

Déterminer la loi de T_k.

Exercice 5 (Loi d'une somme de v.a.i.i.d. suivant une loi géométrique : on retrouve la loi binomiale négative ici par la force brute)**.** Soit (X_n) une suite de v.a. définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ indépendantes de même loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$, de paramètre p. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la v.a. S_n définie par :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

a) Calculer la loi de la v.a. S_2.

b) Calculer éventuellement la loi de S_3 puis celle de S_n pour tout $n \geq 2$.

Exercice 6 (Technique standard pour la loi du min. : « les min sont en osmose avec l'antirépartition »)**.** Soient $(p, q) \in]0, 1[^2$, et X, Y deux v.a.i. de lois géométriques $\mathcal{G}(p)$ et $\mathcal{G}(q)$ respectivement. On note $U = \min(X, Y)$.

Déterminer la loi de U à partir du calcul de la fonction « d'antirépartition » $k \mapsto P(U > k)$ de U.

Autre méthode possible : cf. ex. 106 BANQUE INP.

Exercice 7 (Une méthode incontournable pour les espérances sans passer par la loi)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que n personnes montent dans un ascenseur d'un immeuble de p étages et que chaque personne a autant de chance de descendre à chaque étage. On note X le nombre d'arrêts de l'ascenseur. Déterminer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 8. Un élément chimique émet des électrons pendant un temps T. Le nombre d'électron émis pendant ce temps est une v.a. Y qui suit une loi de Poisson de paramètre λ. Chaque électron émis a une probabilité p d'avoir un effet biologique (on dira d'être efficace). Soit Z la v.a. égale au nombre d'électrons efficaces émis pendant le temps T.

a) Déterminer la loi du couple (Y, Z).

b) Déterminer la loi de Z et son espérance.

c) Les v.a. Y et Z sont-elles indépendantes ?

d) On considère la v.a. X donnant le nombre d'électrons émis non efficaces. Déterminer la loi du couple (X, Z). Les v.a. X et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice 9 (Rendant « naturelle » la modélisation par une loi de Poisson)**.** Pour $a < b$ notons $N_{a,b}$ le nombre de clients se présentant dans un magasin dans l'intervalle de temps $[a, b[$. Soit $a < b < c$, on suppose que les variables $N_{a,b}$ et $N_{b,c}$ sont indépendantes et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi de $N_{a,b}$ sachant $\{N_{a,c} = n\}$ est $\mathcal{B}(n, p)$ où $p = (b-a)/(c-a)$.

a) Montrer que pour tout $(k, l) \in \mathbb{N}^2$, $\dfrac{P(N_{a,b} = k)P(N_{b,c} = l)}{P(N_{a,c} = k + l)} = \binom{k+l}{k} p^k (1-p)^l$.

b) En déduire qu'il existe une constante λ telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ P(N_{a,b} = n) = \frac{\lambda}{n} P(N_{a,b} = n - 1).$$

c) En déduire que $N_{a,b}$ suit une loi de Poisson de paramètre λ.

Exercice 10 (Espérance du min. d'une famille de v.a.)**.** 1) Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$. Etablir l'égalité :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n).$$

2) Soient m et n deux entiers non nuls tels que $m \leq n$.

a) Dans une urne contenant des boules numérotées de 1 à n, on tire sans remise m boules et on note X le plus petit numéro obtenu. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

b) Même question pour un tirage avec remise (on note Y la v.a. correspondante).

c) Comparer les deux résultats pour m fixé et $n \to +\infty$.