Banque CCINP :

Tribus

Exercice 1 (Tribu engendrée : définition et un exemple)**.**
a) Justifier que si $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ est une famille des tribus sur un ensemble Ω alors $\bigcap_{i\in I}\mathcal{T}_i$ est encore une tribu de Ω.
b) En déduire que pour toute partie $\mathcal{M}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ il existe une plus petite tribu de Ω contenant $\mathcal{M}$. On l'appelle par la suite la tribu engendrée par $\mathcal{M}$ et on la note $\sigma(M)$.
c) Soit $\Omega = \mathbb{R}$. Décrire la tribu de Ω engendrée par les singletons.

Exercice 2. Soit (A_n) une suite d'événements d'un espace probabilisé (Ω, A, P).
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $B_n = \bigcup_{k\geq n} A_k$ et $C_n = \bigcap_{k\geq n} A_k$.
On note $B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$ et $C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$.
On dit que B est la *limite inférieure* de la suite (A_n) et C est la *limite supérieure* de la suite (A_n).

a) Justifier que B et C sont des événements.
b) Interprétation « concrète » de B et C : l'un des ces deux événements signifie « les événements A_n se réalisent infiniment souvent », et l'autre « tous les événements A_n se réalisent A.P.C.R. » : lesquels ?

Axiomes des proba

Exercice 3 (QdC : inégalité de sous-additivité des proba. sur les unions dénombrables quelconques)**.** Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(A_n)\in\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ une famille quelconque d'événements.
Montrer que $P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$.

Exercice 4 (Limite inf. et limite sup, suite)**.** On reprend les notations de l'ex. 2

a) On dit que la suite (A_n) converge si, et seulement si $B = C$. On dit alors que la suite (A_n) converge vers $A = B = C$.
Montrer qu'alors $P(A) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$.
b) On suppose que pour tout $n\in\mathbb{N}$, les événements B_n et C_n sont indépendants.
   i) Montrer que B et C sont indépendants. *Indication* – Considérer $P(B\cap\overline{C})$.
   ii) Montrer que si, de plus, la suite (A_n) converge vers A alors $P(A)\in\{0,1\}$.

Exercice 5 (Premier lemme de Borel Cantelli)**.** a) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que la série $\sum P(A_n)$ converge. Montrer que l'événement « être dans A_n infiniment souvent » est de probabilité nulle.
b) Une application :
Deux joueurs (immortels) qui s'ennuient jouent éternellement à pile ou face avec une pièce légèrement déséquilibrée qui tombe sur pile avec proba. $p = 1/2+\varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ petit, par exemple $\varepsilon = 10^{-100}$.
Montrer que presque sûrement, il n'y a qu'un nombre fini de retour à l'égalité entre joueurs.

Révision de première année

Exercice 6. On lance trois dés équilibrés. Quelle est la probabilité :
a) d'obtenir au moins un six ?
b) d'obtenir au moins deux dés ayant le même chiffre ?
c) que la somme des chiffres obtenus soit paire ?
d) Les événements considérés au b) et c) sont-ils indépendants ?

Exercice 7. On considère une boîte contenant 5 boules blanches, 4 boules noires et 3 boules vertes.

a) On tire simultanément trois boules.
   i) Quelle est la probabilité d'avoir trois boules de la même couleur ?

ii) Quelle est la probabilité d'avoir une boule de chaque couleur ?

b) On tire successivement trois boules dans l'urne en remettant à chaque fois la boule tirée dans la boîte. Répondre aux mêmes questions qu'au a).

c) On tire trois boules l'une après l'autre, sans remettre les boules tirées.

i) et ii) Répondre aux deux questions du a).

iii) Quelle est la probabilité que la première boule blanche tirée le soit au troisième tirage ?

iv) Quelle est la probabilité que la deuxième boule blanche tirée le soit au troisième tirage ?

Exercice 8. Une boîte contient N boules de k couleurs : N_1 de couleur c_1, N_2 de couleur c_2, ..., N_k de couleurs c_k. (On a donc $N_1 + \cdots + N_k = N$).

On tire n boules et on cherche la probabilité d'obtenir exactement n_1 boules de couleurs c_1, ..., n_k boules de couleur c_k (avec donc $n_1 + \cdots + n_k = n$).

a) Dans le cas de tirages successifs sans remise.

b) Dans le cas de tirages successifs avec remise.

Exercice 9 (probabilité « ne sachant rien »)**.** Une urne contient b boules bleues et r boules rouges. On retire une des boules de l'urne sans noter sa couleur. On tire une deuxième boule. Quelle est la probabilité que ce soit une boule bleue ? Commentez le résultat obtenu.

Exercice 10 (Urne de Polya :)**.** Pour étudier l'évolution d'une épidémie, Polya a introduit le modèle suivant où $(b, r, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$. Dans une urne contenant b boules bleues et r boules rouges, on effectue un tirage puis on remet la boule tirée avec c boules de la même couleur. On répète l'opération. En notant A_n l'événement : « le n-ième tirage amène une boule bleue », calculer $P(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11 (2ème année)**.** Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite décroissante d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que $P(A_1) = 1/2$ et $\forall\, n \geq 1$, $P(A_{n+1}^c | A_n) \leq \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

Montrer que $P(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n) > 0$.