

**MP2 DS 7 niveau 2****Partie 0 : adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien**

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire (espace euclidien) et  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

- 0.1)** Montrer que pour chaque vecteur  $y \in E$ , il existe un unique vecteur  $z \in E$ , qu'on notera  $z = g(y)$ , tel que

$$\forall x \in E, \langle f(x), y \rangle = \langle x, g(y) \rangle.$$

- 0.2)** En notant  $g$  l'application définie à la question précédente, montrer que  $g \in \mathcal{L}(E)$ . On notera  $g = f^*$  et dira que  $f^*$  est l'endomorphisme adjoint de  $f$ .

- 0.3)** Que vaut  $f^*$  si  $f$  est un endomorphisme symétrique ?

- 0.4)** Montrer que si  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est une base orthonormée de  $E$  et si  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  alors  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^*) = {}^t A$ .

On retiendra donc ici que l'adjoint est l'avatar endomorphisme de la transposée matricielle

**Solution de la partie 0 :**

- 0.1)** Soit  $y \in E$ , notons  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \langle f(x), y \rangle$ .

Par linéarité de  $f$  et linéarité à gauche du produit scalaire, on sait par le théorème de représentation de Riesz pour les formes linéaires d'un espace euclidien, qu'il existe un unique vecteur  $z \in E$  tel que  $\varphi = \langle \cdot, z \rangle$  (égalité de formes linéaires), ce qui signifie exactement qu'il existe un unique  $z \in E$  tel que :

$$\forall x \in E, \langle f(x), y \rangle = \langle x, z \rangle,$$

ce qui est la conclusion demandée.

**N.B.** Ce théorème de représentation de Riesz<sup>1</sup> est bien dans le programme (cité dans la partie calcul diff. plutôt qu'e.v. euclidien, car il sert pour le gradient).

Mais si on a un doute on le redémontre comme en cours, notamment pour l'unicité, penser que si deux vecteurs  $z_1$  et  $z_2$  vérifient que  $\langle x, z_1 \rangle = \langle x, z_2 \rangle$  pour tout  $x \in E$  alors  $z_1 - z_2$  est orthogonal à tout vecteur de  $E$  donc nul.

- 0.2) (M1) Version basique (recommandée) :** soient  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, y_1, y_2 \in E$ .

Pour tout  $x \in E$ ,

$$\begin{aligned} \langle x, g(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) \rangle &= \langle f(x), \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \rangle \quad \text{par déf. de } g \\ &= \lambda_1 \langle f(x), y_1 \rangle + \lambda_2 \langle f(x), y_2 \rangle \quad \text{par linéarité à droite du p.s} \\ &= \lambda_1 \langle x, g(y_1) \rangle + \lambda_2 \langle x, g(y_2) \rangle \quad \text{encore par déf. de } g \\ &= \langle x, \lambda_1 g(y_1) + \lambda_2 g(y_2) \rangle \quad \text{encore par linéarité du p.s.} \end{aligned}$$

L'égalité prouvée pour tout  $x \in E$  et l'unicité du 0.1) donne bien que  $g(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 g(y_1) + \lambda_2 g(y_2)$  c'est-à-dire la linéarité de  $g$ .

**N.B spécial pour Mathurin :**

pas besoin de prouver que  $g(0) = 0$  pour montrer la linéarité.

---

1. et pas Ritz qui est un hôtel célèbre où Amaury descend régulièrement semble-t-il

**(M2) Version plus conceptuelle (Yacine's style) :**

On pose  $\Psi : E \rightarrow E^*$ ,  $a \mapsto \langle a, \cdot \rangle$  qui est linéaire par linéarité à gauche du p.s. et qui est un isomorphisme d'e.v. par théorème de représentation des formes linéaires (Riesz).

Par **0.1** pour chaque  $f \in \mathcal{L}(E)$ , et chaque  $y \in E$ ,  $f^*(y) = \psi^{-1}(\langle f(\cdot), y \rangle)$  ( $\dagger$ ).

Or  $y \mapsto \langle f(\cdot), y \rangle$  est linéaire de  $E$  dans  $E^*$ , par linéarité à droite du p.s.

Donc  $f^*$  est linéaire par la formule ( $\dagger$ ), par composition d'applications linéaires.

**0.3)** Si  $f$  est un endomorphisme symétrique, alors par déf. pour tout  $x, y \in E$ ,

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$$

Par l'unicité dans le 0.1., on en déduit que  $\boxed{f = f^*}$ .

**Terminologie :** pour cette raison, les endomorphismes symétriques sont aussi appelés *auto-adjoints*.

**0.4) (M1)** Avec les notations de l'énoncé, en notant  $A = (a_{i,j})$  on sait, grâce aux propriétés des coordonnées en b.o.n, que pour chaque  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,

$$a_{i,j} = \langle e_i, f(e_j) \rangle \quad (*)$$

Notons  $B$  la matrice de  $f^*$  dans la même b.o.n. On a alors pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  :

$$\begin{aligned} b_{i,j} &= \langle e_i, f^*(e_j) \rangle \quad \text{idem } (*), \\ &= \langle f(e_i), e_j \rangle \quad \text{déf. de l'adjoint,} \\ &= a_{j,i} \quad \text{cf } (*) \end{aligned}$$

L'égalité montrée donne bien que  $\boxed{B = {}^tA}$ .

**(M2)** Pour tout  $x, y \in E$ , en notant  $X, Y$  les vecteurs colonnes représentant  $x, y$  dans la b.o.n.  $\mathcal{B}$ , on a :

$$\langle f(x), y \rangle = {}^t(AX).Y = {}^tX {}^tA.Y.$$

et en notant  $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^*)$ , on a aussi

$$\langle x, f^*(y) \rangle = {}^tXBY$$

On a donc pour toutes les colonnes  $X, Y$  :

$$\boxed{{}^tX {}^tA.Y = {}^tXBY \quad (\ddagger)}$$

De là ;

$$\boxed{\text{il faut savoir en déduire que } {}^tA = B}$$

En effet à partir de ( $\ddagger$ ), on a  ${}^tX({}^tA.Y - BY) = 0$  donc pour chaque  $Y$ , le vecteur  $({}^tA.Y - BY)$  est orthogonal à tous les vecteurs  $X$  donc est nul. Mais cela signifie que  $({}^tA - B)Y$  est nul pour tout  $Y$  donc  ${}^tA - B$  code l'application nulle, donc  ${}^tA - B = 0$   $\square$