Centrale PSI 2 - 2010
un corrigé.

1 Premières propriétés.

Etude de Sim(E).

A.1. On vérifie la caractérisation des sous-groupes.

- $\mathrm{Sim}(E)\setminus\{0\}$ est non vide (il contient l'identité).
- Si $f\in \mathrm{Sim}(E)\setminus\{0\}$ il existe $g\in O(E)$ et $\lambda\in\mathbb{R}^*$ tels que $f=\lambda g$ et $\det(f)=\lambda\det(g)=\pm\lambda\neq 0$. Ainsi $\mathrm{Sim}(E)\setminus\{0\}$ est inclus dans $GL(E)$.
- Si $f_1,f_2\in \mathrm{Sim}(E)\setminus\{0\}$ il existe $g_1,g_2\in O(E)$ et $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}^*$ tels que $f_i=\lambda_i g_i$. On a alors $f_1\circ f_2^{-1}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}(g_1\circ g_2)$ qui est dans $\mathrm{Sim}(E)$ ($O(E)$ est stable par composition) et est non nul.

A.2. On a au mieux trois implications à prouver. On va en fait en prouver quatre ($i) \iff ii)$ puis $i) \iff iii)$).

- Si $h\in \mathrm{Sim}(E)$ alors il existe $g\in O(E)$ et $\lambda\in\mathbb{R}$ tels que $h=\lambda g$. On a alors
$$h^*h=\lambda^2g^*g=\lambda^2Id$$
- Si h^*h est colinéaire à l'identité il existe $\mu\in\mathbb{R}$ tel que $h^*h=\mu Id$. On a alors
$$\forall x\in E,\ \|h(x)\|^2=(h(x)|h(x))=(h^*h(x)|x)=\mu\|x\|^2$$
Si $h\neq 0$, on peut trouver x tel que $h(x)\neq 0$ et ce qui précède donne $\mu>0$ (car $\|x\|^2\geq 0$ et $\|h(x)\|^2>0$). On a alors $g=\frac{1}{\sqrt{\mu}}h$ qui vérifie $g^*g=Id$ et donc $g\in O(E)$. Dans ce cas $h=\sqrt{\mu}g\in \mathrm{Sim}(E)$.
Sinon on a $h=0$ et donc $\mu=0$. Dans ce cas, $h=0\in Sim(E)$.
- Si $h\in \mathrm{Sim}(E)$ alors il existe $g\in O(E)$ et $\lambda\in\mathbb{R}$ tels que $h=\lambda g$. Dans une b.o.n. g est représenté par une matrice orthogonale (d'après le cours) et h est donc représenté par un multiple d'une telle matrice.
- Si la matrice de h en b.o.n. est du type λP avec P orthogonale alors l'endomorphisme g associé à P est orthogonal (car la base est une b.o.n.) et $h=\lambda g\in \mathrm{Sim}(E)$.

Propriétés des endomorphismes antisymétriques.

B.1. Soit $x\in E$. On a
$$(x|f(x))=(f^*(x)|x)=(-f(x)|x)=-(f(x)|x)=-(x|f(x))$$
et donc $(x|f(x))=0$.

B.2. Supposons S stable par l'endomorphisme antisymétrique f. On a alors
$$\forall x\in S^\perp,\ \forall y\in S,\ (f(x)|y)=(x|f^*(y))=-(x|f(y))=0$$
la dernière égalité provenant de $f(y)\in S$ (stabilité de S) et $x\in S^\perp$. On a ainsi montré que
$$\forall x\in S^\perp,\ f(x)\in S^\perp$$
c'est à dire que $S^\perp$ est stable par f.
L'adjoint de l'endomorphisme induit étant égal à l'endomorphisme induit par l'adjoint, on obtient un endomorphisme antisymétrique quand on restreint un endomorphisme antisymétrique à un sous-espace stable.

B.3. On suppose f,g antisymétriques et $fg=-gf$. On a alors
$$\forall x\in E,\ (f(x)|g(x))=(g^*f(x)|x)=(-gf(x)|x)=(fg(x)|x)=(g(x)|f^*(x))=-(g(x)|f(x))$$
et on en conclut que $2(f(x)|g(x))=0$ c'est à dire $(f(x)|g(x)=0$.

B.4. On suppose f orthogonal et antisymétrique. On a alors
$$f^2=-ff^*=-Id_E$$

Encadrement de d_n.

C.1. $\text{Vect}(Id_E)$ est un sous-espace de dimension 1 inclus dans $\text{Sim}(E)$. On a donc

$$d_n \geq 1$$

C.2. Soit $x \neq 0$ élément de E (un tel élement existe si on suppose $n \geq 1$). $\Phi\ :\ f \mapsto f(x)$ est linéaire de V dans E et est injective car tout élément f non nul de $\text{Sim}(E)$ est inversible et vérifie donc $f(x) \neq 0$ (le noyau de Φ est donc réduit à l'application nulle). On en déduit que

$$\dim(V) \leq \dim(E) = n$$

C.3. Soit

$$\mathcal{M} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

C'est clairement un espace vectoriel de dimension 2 (les deux matrice ne sont pas colinéaires). Un élément de cet espace s'écrit $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Si $a = b = 0$, $M = 0$ est une matrice de similitude et sinon, $M = \sqrt{a^2+b^2}M'$ avec M' orthogonale et donc M est aussi une matrice de similitude. Finalement, $\mathcal{M}$ est un espace de dimension 2 formé de matrices de similitudes.
Soit $\mathcal{B}$ une b.o.n. de E et $\Psi\ :\ f \in \mathcal{L}(E) \mapsto Mat(f, \mathcal{B})$. Ψ est un isomorphisme et $V = \Psi^{-1}(\mathcal{M})$ est un espace vectoriel de dimension 2. D'après la question $A.2$, il est constitué d'éléments de $\text{Sim}(E)$.
On en déduit que $d_2 \geq 2$ (il existe un sous-espace de dimension 2 inclus dans $\text{Sim}(E)$). Comme $d_2 \leq 2$ (question précédente) c'est donc que

$$d_2 = 2$$

C.4. En dimension impaire, tout endomorphisme possède au moins une valeur propre (son polynôme caractéristique est de dimension impaire et le théorème des valeurs intérmédiaires indique q'il s'annule puisqu'il est de signes contraires aux voisinages des deux infinis). Soit μ une valeur propre de fg^{-1} et $\lambda = -\mu$. $fg^{-1} - \mu Id_E = fg^{-1} + \lambda Id_E$ est non inversible. En composant à droite par g, on obtient encore un endomorphisme non inversible ($\det(uv) = \det(u)\det(v)$ et si u est non inversible, uv ne l'est pas) et donc

$$f + \lambda g \notin GL(E)$$

Si, par l'absurde, on avait $d_n \geq 2$ alors on pourrait trouver un sous-espace $V \subset \text{Sim}(E)$ de dimension ≥ 2. On pourrait alors trouver $f, g \in V$ avec (f, g) libre. En particulier, f et g sont non nul et, étant des similitudes, sont inversibles. On trouve alors λ tel que $f + \lambda g$ non inversible et comme $f + \lambda g \in V \subset \text{Sim}(E)$ alors $f + \lambda g = 0$ ce qui contredit l'indépendance linéaire. On a ainsi prouvé que

$$d_n = 1$$

C.5. Soit $V \subset \text{Sim}(E)$ un espace vectoriel de dimension $d \geq 1$. Il existe, en particulier, un élément g non nul dans V et alors g est inversible.
L'application $\Theta\ :\ f \in \mathcal{L}(E) \mapsto f \circ g^{-1}$ est linéaire et c'est un isomorphisme (d'isomorphisme réciproque $f \mapsto f \circ g$). $W = \Theta(V)$ est ainsi un sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ de dimension d et il contient $\Theta(g) = Id_E$. Enfin, la structure de sous-groupe de $\text{Sim}(E) \setminus \{0\}$ montre que $W \subset \text{Sim}(E)$.

Systèmes anti-commutatifs d'endomorphismes antisymétriques.

Comme Id_E est un élément non nul de V, le théorème de la base incomplète indique qu'il existe bien une base de V du type $(Id_E, f_1, \ldots, f_{d-1})$.

D.1. On remarque que

$$f_i + f_i^* = (Id_E + f_i)^*(Id_E + f_i) - f_i^* f_i - Id_E$$

Comme f_i et $Id_E + f_i$ sont dans $\mathrm{Sim}(E)$ (avec la structure d'espace vectoriel pour le second) la question $A.2$ montre que $f_i + f_i^*$ est colinéaire à Id_E.

D.2. D'après la question précédente,

$$\forall i \in [1..d-1],\ \exists \lambda_i \in \mathbb{R}/\ f_i + f_i^* = \lambda_i Id_E$$

On pose alors

$$\forall i \in [1..d-1],\ g_i = 2f_i - \lambda_i Id_E$$

- Pour tout i, $g_i + g_i^* = 2(f_i + f_i^*) - 2\lambda_i Id_E = 0$ et g_i est donc antisymétrique.
- La famille $(Id_E, g_1, \dots, g_{d-1})$ est constituée d'éléments de V et elle est libre (si $\alpha Id_E + \sum \alpha_i g_i = 0$ alors $(\alpha - \sum \alpha_i \lambda_i) Id_E + 2\sum \alpha_i f_i = 0$ et donc $\forall i,\ \alpha_i = 0$ et $\alpha - \sum \alpha_i \lambda_i = 0$ ce qui donne $\alpha = 0$). Par cardinal, c'est une base de V.

D.3.

a. Soit $g \in \mathrm{Sim}(E)$ supposé antisymétrique. Il existe un scalaire α et $h \in O(E)$ tels que $g = \alpha h$. On a alors $g^2 = -gg^* = -\alpha^2 hh^* = -\alpha^2 Id_E$.
On remarque alors que

$$g_i g_j + g_j g_i = (g_i + g_j)^2 - g_i^2 - g_j^2$$

et on peut appliquer ce qui précède à chacun des éléments du membre de droite ($g_i + g_j$ est dans V et est donc une similitude) pour obtenir un multiple de l'identité. On a ainsi la prorpiété voulue ($i \neq j$ ne servant a rien).

b. L'application est bien définie, est symétrique (invariance de la trace par passage à l'adjoint qui correpond, après choix d'une b.o.n., à l'invariance de la trace pour les matrices par transposition) et linéaire par rapport à la seconde variable (grâce à la linéarité de la trace). De plus

$$\forall f \in \mathcal{L}(E),\ (f|f) = tr(f^* f)$$

Soit $\mathcal{B}$ une b.o.n et M représentant f dans cette base. ${}^tM$ représente f^* et

$$(f|f) = tr({}^tMM) = \sum_{1\le i,j\le n} m_{i,j}^2 \ge 0$$

Si cette quantité est nulle alors les $m_{i,j}$ sont tous nuls (une somme de nombres positifs n'est nulle que si tous les termes sont nuls) c'est à dire $M = 0$ ou encore $f = 0$. On a ainsi le caractère défini-positif et on a un produit scalaire.

c. Chaque h_i est antisymétrique comme combinaisaon linéaire de g_k qui le sont. D'après la question précédente (appliquée avec les h_i au lieu des g_i) $h_i h_j + h_j h_i$ est colinéaire à l'identité et s'écrit donc $\lambda_{i,j} Id_E$. On a aussi

$$(h_i|h_j) + (h_j|h_i) = tr(h_i^* h_j) + tr(h_j^* h_i) = -tr(h_i h_j + h_j h_i) = -n\lambda_{i,j}$$

La famille $(h_1, \dots, h_{d-1})$ étant orthogonale, $\lambda_{i,j}$ est nul si $i \neq j$. On a prouvé que

$$\forall i \neq j,\ h_i h_j + h_j h_i = 0$$

Chaque h_i est une similitude et s'écrit donc $h_i = \mu_i h_i'$ avec $h_i' \in O(E)$. En divisant h_i par μ_i, on obtient des automorphismes orthogonaux qui ont les mêmes propriétés que les h_i.
Remarque : si $u \in O(E)$, $(u|u) = tr(u^* u) = tr(Id_E) = n$ et pour se ramener au cas des automorphismes orthogonaux, il suffit de normer les h_i puis de les multiplier par $\sqrt{n}$, et donc de considérer les $\frac{\sqrt{n}}{\|h_i\|} h_i$.

D.4. Posons $V = \text{Vect}(Id_E, h_1, \dots, h_{d-1})$. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

- Supposons $\alpha Id_E + \sum \alpha_i h_i = 0$. En identifiant les parties symétrique et antisymétrique (ou en prenant l'adjoint et en faisant la somme et la différence des relations) on obtient $\alpha Id_E = 0$ c'est à dire $\alpha = 0$ et $\sum \alpha_i h_i = 0$. En composant par h_j on obtient

$$0 = \sum_{i=1}^{d-1} \alpha_i h_j h_i = \alpha_j h_j^2 - \sum_{i \neq j} \alpha_i h_i h_j = 2\alpha_j h_j^2 - \sum_{i=1}^{d-1} \alpha_i h_i h_j = 2\alpha_j h_j^2$$

h_j étant antisymétrique et orthogonal, $h_j^2 = -Id_E$ et la relation précédente donne $\alpha_j = 0$ (pour tout j). La famille $(Id_E, h_1, \dots, h_{d-1})$ est donc libre et V est de dimension d.

- Soit $f = \alpha Id_E + \sum \alpha_i h_i \in V$. On a alors

$$f^* f = \left(\alpha Id_E - \sum_{i=1}^{d-1} \alpha_i h_i\right)\left(\alpha Id_E + \sum_{i=1}^{d-1} \alpha_i h_i\right) = \alpha^2 Id - \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j h_i h_j$$

Pour $i \neq j,\ h_i h_j + h_j h_i = 0$ et les termes de la somme s'éliminent deux à deux. Il reste

$$f^* f = \alpha^2 Id_E - \sum_{i=1}^{d-1} \alpha_i^2 h_i^2$$

h_i étant antisymétrique et orthogonal, $h_i^2 = -Id_E$ et $f^* f$ est colinéaire à Id_E ce qui montre (question A.1) que $f \in \text{Sim}(E)$. On a montré que $V \subset \text{Sim}(E)$.

2 Etude dans des dimensions paires.

Cas $\dim(E) = 2p$ avec p impair.

A.1. f_1, f_2 et $f_1 f_2$ sont des automorphismes orthogonaux et ils conservent donc la norme. Comme $\|x\| = 1$, la famille proposée est normée.
$(x|f_1(x)) = 0$, $(x|f_2(x)) = 0$ et $(f_2(x)|f_1 f_2(x))$ proviennent de l'antisymétrie de f_1 et f_2 (et de la question $I.B.1$). On a aussi $(f_1(x)|f_2 f_1(x)) = -(f_1(x)|f_2 f_1(x)) = 0$ (mêmes raisons).
$(f_1(x)|f_2(x)) = 0$ provient de la question $I.b.3$. $(x|f_1 f_2(x)) = (f_1^*(x)|f_2(x)) = -(f_1(x)|f_2(x))$ est alors aussi nul.
Finalement $(x, f_1(x), f_2(x), f_1 f_2(x))$ est une famille orthonormée.
Pour montrer que S est stable par f_i, il suffit de montrer que tout élément de la base donnée de S a une image dans S par f_i. Par "symétrie" des rôles (entre autres, $f_1 f_2 = -f_2 f_1$ qui est plutôt une antisymétrie !), on ne le fait que pour f_1 ; on utilise $f_1^2 = -Id_E$ (question $I.B.4$) :

$$f_1(x) \in S,\ f_1 f_1(x) = -x \in S,\ f_1 f_2(x) \in S,\ f_1(f_1 f_2(x)) = f_1^2(f_2(x)) = -f_2(x) \in S$$

S est un espace de dimension 4 qui est stable par f_1, f_2 et avec la question $I.B.2$, $S^\perp$ est aussi stable par f_1 et f_2. Notons $\tilde{f}_1$ et $\tilde{f}_2$ les endomorphismes induits par f_1 et f_2 sur $S^\perp$. $\tilde{f}_1$ et $\tilde{f}_2$ sont des automorphismes ortogonaux et antisymétriques de $S^\perp$ (question $I.B.2$) et vérifient $\tilde{f}_1 \tilde{f}_2 + \tilde{f}_2 \tilde{f}_1 = 0$. $\text{Vect}(Id_{S^\perp}, \tilde{f}_1, \tilde{f}_2)$ est un sous-espace de $\mathcal{L}(S^\perp)$ de dimension 3 et inclus dans $\text{Sim}(S^\perp)$ (question $I.D$). On a ainsi ($S^\perp$ étant de dimension $n-4$)

$$d_{n-4} \geq 3$$

A.2. Soit p un entier impair.
Si, par l'absurde, $d_{2p} \geq 3$ alors la question précédente montre par récurrence que $d_{2p-4}, d_{2p-8}, \dots \geq 3$. p étant impair, on a $p = 2[4]$ et on en déduit que $d_2 \geq 3$ ce qui est faux. On a ainsi $d_{2p} \leq 2$.

Posons $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. En considérant l'espace engendré par les matrices définies par blocs par $\begin{pmatrix} I_2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & I_2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} J_2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_2 \end{pmatrix}$, on obtient un sous-espace de dimension 2 de $\mathcal{M}_{2p}(\mathbb{R})$. Comme en $I.C.3$ ce sous-espace est formé de matrices de similitudes et on en déduit que $d_{2p} \geq 2$.
On a finalement prouvé que $d_{2p} = 2$ quand p est un entier impair.

Cas $\dim(E) = 4$**.**

B.1.

a. On montre comme en $II.A.1$ que $(x, f_1(x), f_2(x), f_1f_2(x))$ est une famille orthonormée et, par cardinal et dimension, on en déduit que c'est une base orthonormée de E. $f_3(x)$ peut se décomposer sur cette base et s'écrit

$$f_3(x) = \alpha x + \beta f_1(x) + \gamma f_2(x) + \delta f_1 f_2(x)$$

Comme la base est orthonormée, on a même

$$\alpha = (f_3(x)|x),\ \beta = (f_3(x)|f_1(x)),\ \gamma = (f_3(x)|f_2(x)),\ \delta = (f_3(x)|f_1f_2(x))$$

Les mêmes arguments qu'en $II.A.1$ donnent $\alpha = \beta = \gamma = 0$. On a alors $f_3(x) = \delta f_1 f_2(x)$ et, en passant à la norme (les f_i étant ds automorphismes orthogonaux) $|\delta| = 1$.

b. Soient x, y des éléments non nuls de E. $f_3(x) = \pm f_1f_2(x)$ et $f_3(y) = \pm f_1f_2(y)$ et on veut montrer que le signe est le même dans les deux cas. Si, par l'absurde, ce n'est pas le cas alors, par exemple, $f_3(x) = f_1f_2(x)$ et $f_3(y) = -f_1f_2(y)$. On en déduit que $f_3(x+y) = f_1f_2(x) - f_1f_2(y)$. Mais par ailleurs, $f_3(x+y) = \pm f_1f_2(x+y)$. En identifiant, on obtient $f_1f_2(x) = 0$ ou $f_1f_2(y) = 0$ ce qui est impossible car f_1f_2 est inversible (et même orthogonal). On vient de montrer que $\forall x \neq 0,\ f_3(x) = f_1f_2(x)$ OU $\forall x \neq 0,\ f_3(x) = -f_1f_2(x)$. Dans un cas comme dans l'autre, la relation reste vraie pour $x = 0$. Finalement $f_3 = \pm f_1 f_2$.

c. En utilisant $f_1f_2 = -f_2f_1$ et $f_i^2 = -Id$, on obtient

$$Mat(f_1, B) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Mat(f_2, B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Mat(f_3, B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que

$$M(x_0, x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_0 & -x_1 & -x_2 & -x_3 \\ x_1 & x_0 & -x_3 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_0 & -x_1 \\ x_3 & -x_2 & x_1 & x_0 \end{pmatrix}$$

B.2. Si $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 0$ alors $M(0,0,0,0) = 0$ est une matrice de similitude. Sinon, $M = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} M'$ avec M' qui a des colonnes normées et deux à deux orthogonales et qui est donc une matrice orthogonale. M est encore une matrice de similitude.
On vient de trouver un sous-espace de dimension 4 formé de matrices de similitudes et on en déduit que $d_4 \geq 4$. Comme $d_4 \leq 4$, on a finalement

$$d_4 = 4$$

Cas $\dim(E) = 12$.

C.1. Si, par l'absurde, $f_3 = f_1 f_2$ alors

$$f_3 f_4 = f_1 f_2 f_4 = -f_1 f_4 f_2 = f_4 f_1 f_2 = f_4 f_3$$

et comme $f_3 f_4 = -f_3 f_4$ on aurait $f_3 f_4 = 0$ ce qui est impossible car f_3 et f_4 sont inversibles.
On montre de même que $f_3 = -f_1 f_2$ est impossible

C.2. $f_1 f_2 f_3$ est orthogonal (composée d'automorphisme orthogonaux) et symétrique car

$$(f_1 f_2 f_3)^* = f_3^* f_2^* f_1^* = -f_3 f_2 f_1 = f_3 f_1 f_2 = -f_1 f_3 f_2 = f_1 f_2 f_3$$

Si, par l'absurde, $f_1 f_2 f_3$ était colinéaire à Id_E, il vaudrait $\pm Id_E$ (car c'est un automorphisme orthogonal) et on aurait alors $f_1 f_2 = \pm f_3^{-1} = \pm f_3^*$ (caractère orthogonal de f_3) et donc $f_1 f_2 = \pm f_3$ (avec l'antisymétrie de f_3) ce qui est exclus.

C.3. $f_1 f_2 f_3$ est diagonalisable car symétrique. Ses valeurs propres ne peuvent être que 1 et -1 car il est orthogonal. Enfin, comme ce n'est ni Id_E ni $-Id_E$ il n'y a pas une seule valeur propre. Finalement

$$\mathrm{Sp}(f_1 f_2 f_3) = \{1, -1\}$$

On peut ainsi trouver un vecteur normé y et un autre z tels que $f_1 f_2 f_3(y) = y$ et $f_1 f_2 f_3(z) = -z$.

$$(f_1 f_2 f_3(y+z)|y+z) = (y-z|y+z) = \|y\|^2 - \|z\|^2 = 0$$

En posant $x = \frac{y+z}{\|y+z\|}$ (qui existe car $y + z = 0$ deux sous-espaces propres étant en somme directe).

C.4. Les vecteurs sont normés car x l'est et car les endomorphismes considérés conservent la norme. x est orthogonal à $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_1 f_2(x)$, $f_1 f_3(x)$ et $f_2 f_3(x)$ comme en question $II.A.1$ et à $f_1 f_2 f_3(x)$ par choix de x.
f_1 conservant le produit scalaire, $f_1(x)$ est orthogonal à $f_1 f_2 f_3(x)$. Il est orthogonal à $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_1 f_2(x)$, $f_1 f_3(x)$ et $f_2 f_3(x)$ comme en question $II.A.1$.
On montre de même les autres orthogonalités pour conclure que la famille proposée est orthonormée.

C.5.

a. On montre comme en $II.A.1$ que V est stable par f_1, f_2 et f_3 et on en conclut (question $I.B.2$) qu'il en est de même pour $V^\perp$.

b. On se retrouve alors dans la situation de la partie $II.B$ ($V^\perp$ est de dimension 4) et on conclut que $f_3' = \pm f_1' f_2'$.

c. Avec la question $I.B.1$, on a $(f_4(e)|e) = 0$. Avec $I.B.3$ on a aussi $(f_4(e)|f_1(e)) = (f_4(e)|f_2(e)) = (f_4(e)|f_3(e)) = 0$. Cette dernière égalité donne $(f_4(e)|f_1 f_2(e)) = 0$. On a ainsi montré que $f_4(e)$ est orthogonal aux éléments d'une base de $V^\perp$ et que donc

$$f_4(e) \in (V^\perp)^\perp = V$$

Soit alors $y \in V^\perp$; il s'écrit $y = x_0 e + x_1 f_1(e) + x_2 f_2(e) + x_3 f_1 f_2(e)$ et on en déduit (avec $f_4 f_i = -f_i f_4$ et $f_1 f_2(e) = f_3(e)$)

$$f_4(y) = (x_0 Id_E - x_1 f_1 - x_2 f_2 - x_3 f_3)(f_4(e))$$

et donc $f_4(y) \in V$ car $f_4(e) \in V$ et V est stable par f_1, f_2 et f_3. On vient de monter que

$$\forall y \in V^\perp,\ f_4(y) \in V$$

d. On a $W \subset V$ et on en déduit que W et $V^\perp$ sont orthogonaux et, en particulier, en somme directe. $V^\perp$ est stable par f_1, f_2, f_3 et est envoyé par f_4 sur W. On a donc

$$\forall i \in [1..4],\ f_i(V^\perp) \subset V^\perp + W$$

$f_4(W) = V^\perp$ et pour $i = 1, 2, 3$, $f_i(W) = f_i f_4(V^\perp) = -f_4 f_i(V^\perp) \subset f_4(V^\perp) = W$. Ainsi,

$$\forall i \in [1..4],\ f_i(W) \subset V^\perp + W$$

On en déduit donc que

$$\forall i \in [1..4],\ f_i(W \oplus V^\perp) \subset V^\perp \oplus W$$

$H = V^\perp \oplus W$ est stable par tous les f_i et il en est alors de même de $H^\perp$. On a donc dans un espace H de dimension 4 une famille de quatre endomorphismes orthogonaux antisymétriques vérifiant l'hypothèse de la fin de la partie I et donc un sous-espace vectoriel de dimension 5 inclus dans $\mathrm{Sim}(H)$ ce que l'on a exclus en $I.C.2$.

C.6. On en déduit que $d_{12} \leq 4$.

Considérons l'ensemble des matrices du type (définition par blocs)

$$\begin{pmatrix} x_0 I_3 & -x_1 I_3 & -x_2 I_3 & -x_3 I_3 \\ x_1 I_3 & x_0 I_3 & -x_3 I_3 & x_2 I_3 \\ x_2 I_3 & x_3 I_3 & x_0 I_3 & -x_1 I_3 \\ x_3 I_3 & -x_2 I_3 & x_1 I_3 & x_0 I_3 \end{pmatrix}$$

On a un sous-espace de dimension 4 formé de matrices de similitudes et on en déduit que $d_{12} \geq 4$. Finalement

$$d_{12} = 4$$

Cas $\dim(E) = 8$.

D. Si $\forall i,\ x_i = 0$ alors $M(x_0, \dots, x_7) = 0$ est une matrice de similitude. Sinon, $M = \sqrt{x_0^2 + \cdots + x_7^2}M'$ avec M' qui a des colonnes normées et deux à deux orthogonales et qui est donc une matrice orthogonale. M est encore une matrice de similitude.

On a un sous-espace de dimension 8 formé de matrices de similitudes et on en déduit que $d_8 \geq 8$. Comme $d_8 \leq 8$, on a finalement

$$d_8 = 8$$

Cas général.

E. On peut conjecturer que

$$d_n = 2^p \quad \text{avec} \quad p = \max\{k \in \mathbb{N} /\ 2^k | n\}$$