Janvier 2022

MP2 DS 6 niveau INP

Exercice

On note $I =]0, +\infty[$ et on définit pour n entier naturel non nul et pour $x \in I$, $f_n(x) = e^{-nx} - e^{-2nx}$.

(Q1) Justifier que pour tout entier naturel non nul n, les fonctions f_n sont intégrables sur I et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$. Que vaut alors la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f_n(x)dx\right)$?

(Q2) Démontrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur I. Déterminer sa fonction somme S et démontrer que S est intégrable sur I. Que vaut alors $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right)dx$?

(Q3) Donner, sans aucun calcul, la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\int_0^{+\infty} |f_n(x)|dx\right)$.

Problème : séries de Taylor et développements en série entière

Dans ce problème, toutes les fonctions considérées sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

Partie préliminaire

Dans cette partie, les questions sont indépendantes les unes des autres et leurs résultats peuvent être admis dans la suite du problème.

1. Justifier, pour tout réel $x \in]-1, 1[$, l'existence de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$ et donner sa valeur.

2. On rappelle que la fonction Γ est définie pour tout réel $x \in]0, +\infty[$ par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t.$$

Démontrer que, pour tout réel $x \in]0, +\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et en déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de $\Gamma(n)$.

3. Démontrer la formule de Taylor avec reste de Laplace (ou reste intégral) :
si I est un intervalle contenant le réel a, si f est une fonction de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, alors pour tout réel $x \in I$ et pour tout entier naturel n, on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

I Exemples d'utilisation de séries de Taylor

4. On considère la fonction f définie pour tout réel $x \neq 0$, $f(x) = (1-\cos(x))/x$.
A l'aide de la série de Taylor de f, montrer que f se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

5. Expliciter une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de 0 et vérifiant, pour tout entier naturel n, l'égalité $f^{(n)}(0) = n\, n!$.

6. Un théorème des moments.
Soit f une fonction développable en série entière sur $]-R, R[$ avec $R > 1$: $\forall x \in]-R, R[, f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ On suppose que, pour tout entier naturel n, $\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
L'objectif de cette question est de montrer que f est identiquement nulle sur $]-R, R[$.

a) Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f(x)\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ converge normalement sur l'intervalle $[0, 1]$.

b) À l'aide du calcul de $\displaystyle\int_0^1 (f(x))^2\,\mathrm{d}x$, démontrer que la fonction f est nulle sur l'intervalle $[0, 1]$.

c) Démontrer que la fonction f est nulle sur l'intervalle $]-R, R[$.

II Contre-exemples

7. Donner un exemple de fonction f à la fois de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I et développable en série entière au voisinage de l'origine, mais qui ne coïncide pas avec sa série de Taylor en 0 sur I tout entier.

8. Un exemple de fonction ne coïncidant avec sa série de Taylor en 0 sur aucun voisinage de 0.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(0) = 0$ et $\forall x \neq 0, f(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

a) Donner l'allure de la courbe de la fonction f.

b) Par les théorèmes généraux, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.
Démontrer que, pour tout entier naturel n, il existe un polynôme P_n tel que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

c) Démontrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,+\infty[$ avec $\forall\, n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = 0$.
Par parité, la fonction f ainsi définie est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

d) La fonction f est-elle développable en série entière sur un intervalle $]-r, r[$?

9. Un exemple où la série de Taylor de la fonction f en 0 a un rayon nul.

Pour tout réel x, on pose : $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+tx^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Justifier que, pour tout réel x, la fonction $t \longmapsto \dfrac{e^{-t}}{1+tx^2}$ est bien intégrable sur $[0,+\infty[$, puis démontrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
On admettra que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que l'on obtient les dérivées successives en dérivant sous le signe intégrale.

b) Pour $t \in]0,+\infty[$, calculer, au moyen d'une série entière, les dérivées successives en 0 de la fonction $h\ :\ x \longmapsto \dfrac{e^{-t}}{1+tx^2}$.

c) En déduire l'expression de $f^{(n)}(0)$ pour tout entier naturel n.

d) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$?

III Une caractérisation des fonctions développables en séries entières

On se propose, dans cette partie, d'étudier une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle centré en 0 soit développable en série entière au voisinage de 0.

10. La condition suffisante.

a) Soit V un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(V,\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $(\alpha, A, \lambda) \in (\mathbb{R}^{+*})^3$ tels que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \sup_{x\in[-\alpha,\alpha]} |f^{(n)}(x)| \leq A\lambda^n n!$$

Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 et donner une minoration du rayon de convergence en fonction de α et λ.

b) Une application : Soit V un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(V,\mathbb{R})$ telle que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ f^{(n)} \geqslant 0$ sur V. On veut montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0.
On fixe un $\alpha > 0$ tel que $[-\alpha, 2\alpha]$ soit inclus dans V et on considère $x \in [-\alpha,\alpha]$.

(i) A l'aide de la formule de Taylor reste intégral, montrer que $0 \leq \dfrac{\alpha^n}{n!} f^{(n)}(x) \leq f(x+\alpha) \leq f(2\alpha)$.

(ii) En déduire le résultat annoncé à l'aide du résultat de la question a).

11. La condition nécessaire :

a) On suppose f développable en série entière avec rayon de convergence $R > 0$. On fixe α et r tels que $0 < \alpha < r < R$. Montrer qu'il existe un $M > 0$ (qui dépend de r) tel que pour tout $x \in [-\alpha,\alpha]$, $|f(x)| \leq \dfrac{M}{1-\frac{\alpha}{r}}$.

b) Avec les notations du (a) montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [-\alpha,\alpha]$, $|f^{(k)}(x)| \leq \dfrac{M}{\left(1-\dfrac{\alpha}{r}\right)} \dfrac{k!}{(r-\alpha)^k}$

c) Conclure qu'on a bien la réciproque du 10 a).