DM 12 : polynômes orthogonaux

Pour le lundi 7 février

1 Cadre

Soit $I =]a,b[$ un intervalle ouvert non vide et $\varphi \ : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue positive. On suppose que l'ensemble $\{t \in]a,b[,\ \varphi(t) \neq 0\}$ est dense dans I.

On note E_φ l'ensemble des fonctions $g \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ telles que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |g(t)|^2\varphi(t)dt$ converge.

a) Montrer que E_φ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$.

b) Montrer que l'application $E_\varphi^2 \to \mathbb{R}$, $(f,g) \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\varphi(t)dt$ est un produit scalaire.

Dans tout ce qui suit, quand on considérera un produit scalaire, ce sera ce produit scalaire, pour une certaine fonction φ, on notera, pour $f,g \in E_\varphi$: $(f|g) = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\varphi(t)dt$, on dit souvent que la fonction φ est une *fonction de poids* en ce sens qu'elle modifie la mesure sur l'intervalle $]a,b[$.

c) On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t \mapsto \varphi(t)t^{2n}$ est intégrable sur I. En déduire que toutes les fonctions polynomiales sont dans E_φ. Dans ce qui suit on identifiera les fonctions polynomiales définies sur I avec leur polynôme formel associé, ce qui est sans inconvénient puisque I est infini.

2 Définition et relation de récurrence

Définition Une suite (P_n) de polynômes orthogonaux est une suite où chaque P_n est un polynôme de degré n et pour $m \neq n$, $(P_m|P_n) = 0$.

Remarque : Par exemple (P_n) peut être obtenue comme l'orthogonalisée de la base canonique par Gram-Schmidt, ce qui correspond au cas où les P_n sont à coefficient dominant 1.

a) **Relation de récurrence :** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe des réels a_n, b_n, c_n tels que :

$$P_{n+1} = (a_nX + b_n)P_n + c_nP_{n-1} \quad (\dagger)$$

Indication – voir l'égalité à obtenir sous la forme $P_{n+1} - a_nXP_n = b_nP_n + c_nP_{n-1}$.

b) **Cas particulier, symétrique :** on suppose $I =]-a,a[$ et φ est paire.

(i) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme P_n est une fonction paire (resp. impaire) si n est pair (resp. impair).

(ii) Montrer qu'ici en outre, avec les notations du a), $b_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) **L'exemple de polynômes de Legendre :**

(i) on prend $I =]-1,1[$ et $\varphi\ :\ t \mapsto 1$. On note $L_n(X) = \dfrac{1}{2^n n!}[(X^2-1)^n]^{(n)}$ où l'exposant extérieur est un exposant de dérivation. Montrer que la famille (L_n) est une famille de polynôme orthogonaux (polynômes de Legendre).

(ii) En écrivant $[(x^2-1)^n]^{(n)} = [(x-1)^n(x+1)^n]^{(n)}$ calculer $L_n(1)$ en en déduire une première relation entre a_n et c_n dans ce cas.

(iii) En identifiant les coefficients de X^n dans $(\dagger)$ obtenir une seconde relation entre a_n et c_n et donc expliciter la formule $(\dagger)$ pour les polynômes de Legendre.

d) **L'exemple des polynômes de Tchebychev**

(i) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme T_n tel que $\forall\, \theta \in \mathbb{R}$, $\cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta))$.

(ii) On prend $I =]-1,1[$ et $\varphi : \ t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. Justifier que la famille (T_n) est une famille de polynômes orthogonaux dans E_φ.

(iii) Expliciter les coefficients a_n et c_n de (†) dans ce cas.

e) **Complément sur la formule de récurrence dans le cas où les polynômes sont de coefficient dominant** 1

Soit (P_n) une suite de polynômes orthogonaux avec $\deg(P_n) = n$ et qu'on suppose de coefficient dominant un. On écrit alors la relation de récurrence d'ordre deux (†) sous la forme :

$$P_{n+1} = (X - \alpha_n)P_n - \beta_n P_{n-1}$$

(Le coefficient de X dans la parenthèse $(X - \alpha_n)$ est 1 car P_n et P_{n+1} sont supposés de même coeff. dominant un).

(i) Montrer que $\alpha_n \|P_n\|^2 = (XP_n|P_n)$ et que $\alpha_n \in I =]a,b[$ l'intervalle d'intégration.

Indication – Pour montrer que $\alpha_n \in I$, on pourra raisonner par l'absurde en utilisant le fait que si $\alpha_n \notin I$ alors $t \mapsto t - \alpha_n$ garde un signe constant sur I.

(ii) Montrer que $\beta_n \|P_{n-1}\|^2 = \|P_n\|^2$. En particulier $\beta_n > 0$.

3 Propriétés des racines

Soit (P_n) une suite de polynômes orthogonaux.

a) Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est simplement scindé et que ses n racines sont dans $]a,b[$.

Indication – On suppose par l'absurde que P_n admet $r < n$ racines dans $]a,b[$, et on note $\lambda_1 < \cdots < \lambda_s$ avec $r \le s$ les racines où P_n s'annule en changeant de signe. On note $Q(X) = (X-\lambda_1)\dots(X-\lambda_s)$. Conclure en considérant le p.s. $(P_n|Q)$.

b) **Entrelacement des racines :**

On note $H(n)$ le prédicat : P_n est scindé à racines simples dans $]a,b[$ et entre deux racines consécutives de P_n il y a une racine de P_{n-1}.

i) Soit $n \ge 1$. Démontrer que P_n et P_{n-1} n'ont pas de racines communes.

ii) Soit $n \ge 1$. Démontrer que pour toute racine λ de P_n, on a $P_{n+1}(\lambda)P_{n-1}(\lambda) < 0$.

iii) Démontrer que P_2 admet deux racines distinctes et que l'unique racine de P_1 est entre ces deux racines.

iv) Soit $n \ge 2$. On suppose que $H(n)$ est vraie. Notons $\lambda_1 < \cdots < \lambda_n$ les racines de P_n.

(1) Démontrer que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $(-1)^{n-k}P_{n+1}(\lambda_k) < 0$.

(2) En déduire que $H(n+1)$ est vraie.

La récurrence est établie et $H(n)$ est vraie pour tout $n \ge 1$.

4 Interprétation en termes d'endomorphisme symétrique

4.1 Interprétations des racines des P_n comme v.p. d'un endo. symétrique

Notons $\pi_n \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}_{n-1}[X])$ la projection orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$ sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Soit $T_n : \mathbb{R}_{n-1}[X] \to \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $f \mapsto \pi_n(Xf)$.

a) Montrer que T_n est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

b) Montrer que les valeurs propres de T_n sont exactement les racines de P_n, et pour chaque valeur propre λ de T_n relier les vecteurs propres associé au quotient de la division euclidienne de P_n par $(X - \lambda)$.

c) Retrouver le fait, obtenu autrement au 3)a), que P_n admet n racines réelles distincts.

4.2 Application au résultat d'entrelacement des racines

On fixe un $n \in \mathbb{N}$ et on note $\lambda_1 < \cdots < \lambda_n$ les racines de P_n et $\mu_1 < \cdots < \mu_{n+1}$ les racines de P_{n+1}. Le but de cette partie est de redémontrer que ces racines sont entrelacées, et précisément que :

$$\mu_1 < \lambda_1 < \mu_2 < \cdots < \lambda_n < \mu_{n+1}$$

On fixe un $k \in [\![1, n]\!]$. On veut montrer que $\mu_k < \lambda_k \quad (C)$.

Pour chaque n, on considère la forme bilinéaire $B : \mathbb{R}_{n-1}[X]^2 \to \mathbb{R}$, $(f, g) \mapsto B(f, g) \coloneqq (Xf|g)$.

a) Justifier que pour tout $(f, g) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^2$, $B(f, g) = (T_n(f)|g)$.

On note $f_1, \ldots, f_n$ une b.o.n. de vecteurs propres de T_n pour les v.p. resp. $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et $g_1 \ldots, g_{n+1}$ une b.o.n. vecteurs propres de T_{n+1} pour les v.p. resp. $\mu_1, \ldots, \mu_{n+1}$.

b) Si on prend un vecteur $f = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i$,avec les $\alpha_i \in \mathbb{R}$, justifier que $B(f, f) \leq \lambda_k \|f\|$.

c) Si on prend un vecteur $g = \sum_{i=k}^{n+1} \beta_i g_i$, avec les $\beta_i \in \mathbb{R}$, justifier que $B(g, g) \geq \mu_k \|g\|$.

d) Démontrer alors l'inégalité (C) en justifiant qu'il existe un vecteur $f \neq 0$ tel que $f \in \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_k) \cap \mathrm{Vect}(g_k, \ldots, g_{n+1})$.

e) Obtenir de même l'inégalité $\mu_k \leq \lambda_{k+1}$ ce qui prouve la conclusion.

5 Méthode d'approximation de Gauss pour les calculs d'intégrales

Pour $f : I \to \mathbb{R}$. On veut faire un calcul approché de $\int_a^b f(t)\varphi(t)dt$. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les n racines, dans I, du n-ième polynôme orthogonal P_n d'une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes orthogonaux dans E_φ.

5.1 Une formule exacte pour les polynômes de degré au plus $\leq 2n - 1$.

Le but de cette partie est de montrer qu'il existe des constantes universelles $(\kappa_1, \ldots, \kappa_n) \in \mathbb{R}^n$ telles que, pour tout $Q \in \mathbb{R}_{2n-1}[x]$, on ait :

$$\int_a^b Q(t)\varphi(t)dt = \sum_{i=1}^{n} \kappa_i Q(\lambda_i).$$

Intérêt : Les κ_i sont indépendants de Q. Donc une fois qu'on les a calcué, le calcul de l'intégrale de Q se ramène à l'évaluation de Q en n points fixés : les zéros de P_n. C'est la méthode d'intégration de Gauss.

a) Soit $Q \in \mathbb{R}_{2n-1}[x]$ fixé et L le polynôme d'interpolation de Lagrange de Q aux points λ_i.

On note $R = Q - L$. Justifier qu'on peut écrire R sous la forme $R = SP_n$ où S est un polynôme de degré au plus $n - 1$.

b) En déduire le résultat annoncé.

c) Montrer qu' en outre les κ_i sont tous positifs (ce qui est un facteur de stabilité pour la méthode d'approximation décrite ci-dessous).

5.2 Estimation de l'erreur dans le cas général

Soit $f \in \mathcal{C}^{2n}(I, \mathbb{R}) \cap E_\varphi$. Le but de cette partie est d'estimer l'erreur que l'on commet si on remplace $\int_a^b f\varphi$ par $\sum_{i=1}^{n} \kappa_i f(\lambda_i)$ suivant la même formule qu'à la partie précédente.

On note $E_n(f) = \int_a^b f\varphi - \sum_{i=1}^{n} \kappa_i f(\lambda_i)$. On va démontrer le :

Théorème : Pour chaque $f \in \mathcal{C}^{2n}(I,\mathbb{R}) \cap E_\varphi$, il existe un $\xi \in I$ tel que :

$$E_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_a^b P_n^2(t)\varphi(t)dt.$$

Pour cela on propose les étapes suivantes :

a) Soit $f \in \mathcal{C}^m(I,\mathbb{R})$ s'annulant d fois sur I. Montrer que si $d > m$, il existe $\xi \in I$, $f^{(m)}(\xi) = 0$.

b) Soit K un corps commutatif et $u_1, \ldots, u_k$ des éléments deux à deux distincts dans K et $(x_1, \ldots, x_k, x'_1, \ldots, x'_k) \in K^{2k}$ quelconque. Montrer qu'il existe un unique polynôme $T \in K[X]$ de degré strictement inférieur à $2k$ tel que pour tout $i = 1, \ldots, k$, on ait $T(u_i) = x_i$ et $T'(u_i) = x'_i$.

c) Soit f comme dans les hypothèses du théorème. Justifier qu'il existe un polynôme R avec $\deg(R) \leq 2n-1$ tel que $f - R$ s'annule avec multiplicité au moins deux en chaque racine λ_i de P_n.

d) Montrer que pour tout $u \in I$, il existe un $\xi_u \in I$ tel que :

$$f(u) - R(u) = \frac{f^{(2n)}(\xi_u)P_n(u)^2}{(2n)!}.$$

e) A l'aide du résultat du 5.1. justifier qu'il existe un $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\int_a^b (f-R)(t)\varphi(t)dt = \alpha \int_a^b P_n^2(t)\varphi(t)dt.$$

f) Démontrer enfin qu'il existe un $\xi \in I$ tel que $\alpha = \dfrac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}$. *Indication* – Il suffit de montrer que la fonction $(f - R - \alpha P_n^2)^{(2n)}$ s'annule dans I.