$\boxed{\text{DM 12 : polynômes orthogonaux, solution : parties 1,2,3}}$

1 Cadre

a) Méthode standard pour les espaces $\mathscr{L}^2$.

Soient $f, g \in E_\varphi$. Avec l'inégalité $2|fg| \le f^2 + g^2$ due à l'identité remarquable $(|f| - |g|)^2 \ge 0$, multipliée par $\varphi \ge 0$, on a :

$$|fg|\varphi \le \frac{1}{2}(f^2\varphi + g^2\varphi)$$

et donc, par majoration, on sait que $|fg|\varphi$ est intégrable sur I.
Or $(f+g)^2 = f^2 + g^2 + 2fg$ donc

$$(f+g)^2\varphi = f^2\varphi + g^2\varphi + 2fg\varphi,$$

et chaque terme du membre de droite de cette égalité est intégrable sur I, donc $(f+g)^2\varphi$ est intégrable sur I.
Ainsi E_φ est stable par +. D'autre part il contient la fonction nulle et est trivialement stable par multiplication par un scalaire λ donc $\boxed{E_\varphi \text{ est bien un s.e.v. de } \mathcal{C}(I, \mathbb{R})}$.

b) Notons ψ cette application.
• ψ est évidemment **symétrique** par commutativité du produit des fonctions, $\psi(f, g) = \psi(g, f)$ pour tout (f, g).
• par symétrie, pour montrer que ψ est **bilinéaire** il suffit de vérifier la linéarité de ψ par exemple à gauche i.e. mq $\psi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g) = \lambda_1\psi(f_1, g) + \lambda_2\psi(f_2, g)$.
Or cette égalité est vérifiée par linéarité à gauche du produit de fonctions dans l'intégrale et linéarité de l'intégrale.
• Soit $f \in E_\varphi$. Alors $\psi(f, f) = \int_I f^2\varphi$ et comme $|f|^2\varphi \ge 0$, on sait que $\psi(f, f) \ge 0$ par positivité de l'intégrale. Donc ψ est **positive**.
• Soit $f \in E_\varphi$ tel que $\psi(f, f) = 0$. Comme $f^2\varphi$ est une fonction **continue positive**, donc en déduit par théorème que pour tout $t \in I$, $f^2(t)\varphi(t) = 0$.
Or par hyp. il existe un sous-ensemble dense J de I tel que $\forall\, t \in J$, $\varphi(t) \neq 0$.
Donc $\forall\, t \in J$, $f^2(t) = 0$ et comme f est continue sur I et que J est dense dans I, on en déduit que f est nulle sur I entier.
Avec ces quatre propriétés, on a bien montré que $\boxed{\psi \text{ est un p.s. sur } E_\varphi}$.

c) Comme par a) E_φ est un s.e.v., et qu'il contient tous les e_n, on en déduit que E_φ contient toutes les combinaisons linéaires des $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donc que $\boxed{E_\varphi \supset \mathbb{R}[t]}$.

2 Définition et relation de récurrence

Remarque utile dans toute le problème :

Rem. 1 Par déf. du produit scalaire ici, pour tout $(f, g, h) \in E_\varphi^3$ telles que $\int_I fgh\varphi$ soit bien définie, on a :

$$(fg|h) = \int_I fgh\varphi = (f|gh).$$

Rem. 2 Par déf. $P_n \perp \mathbb{R}_{n-1}[X]$ est un vecteur directeur de la droite orthogonale de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$. Ainsi les chaque P_n est « unique à multiplication par une constante près ».

a) **Relation de récurrence :** Par déf. $P_n \perp \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $P_{n+1} \perp \mathbb{R}_n[X]$.
Pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$, d'après la remarque :

$$(XP_n|Q) = \int_I (tP_n(t))Q(t)\varphi(t)dt = \int_I P_n(t)(tQ(t))\varphi(t)dt = (P_n|XQ).$$

et $(P_n|XQ) = 0$ car $XQ \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Ainsi $XP_n \perp \mathbb{R}_{n-2}[X]$.
Mais alors comme P_{n+1} et XP_n sont tous les deux de degré $n+1$ il existe un réel a_n tel que $P_{n+1} - a_n XP_n$ soit de degré $\leq n$. (Précisément a_n est le quotient du coefficient dominant de P_{n+1} par celui de P_n).
Comme ce polynôme est somme de deux polynômes orthogonaux à $\mathbb{R}_{n-2}[X]$, il est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-2}[X]$. Or l'orthogonal de $\mathbb{R}_{n-2}[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ est engendré par P_n et P_{n-1}. Donc il existe des coeff. b_n et c_n tels que $P_{n+1}(X) - a_n XP_n(X) = b_n P_n(X) + c_n P_{n-1}(X)$.

b) i) Pour tout $f \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $(P_n(-X)|f) = \int_{-a}^{a} P_n(-t)f(t)\varphi(t)dt \overset{(1)}{=} \int_{-a}^{a} P_n(t)f(-t)\varphi(t)dt$ par changement de variable $t \mapsto -t$ dans l'intégrale et avec la parité de φ.
Comme $t \mapsto f(-t)$ est aussi dans $\mathbb{R}_{n-1}[t]$ on sait que $\int_{-a}^{a} P_n(t)f(-t)\varphi(t)dt = 0$ et on déduit donc de (1) que $P_n(-X)$ est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et donc est colinéaire à $P_n(X)$.
Le facteur de colinéarité est donné par le coeff. dominant et $(-X)^n = (-1)^n X^n$ d'où la conclusion $P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$.

ii) En remplaçant X par $-X$ dans la relation de réc. $P_{n+1}(-X) = (-a_n X + b_n)P_n(-X) + c_n P_{n-1}(-X)$, on a :

$$(-1)^{n+1}P_{n+1}(X) = (-a_n X + b_n)(-1)^n P_n(X) + c_n(-1)^{n-1}P_{n-1}(X).$$

En simplifiant par $(-1)^{n-1}$, on en déduit $P_{n+1}(X) = (a_n X - b_n)P_n(X) + c_n P_{n-1}(X)$ ce qui par différence avec la formule initiale donne $b_n = 0$. □

c) **L'exemple des polynômes de Legendre :**

i) Notons $q_n(X) = (X^2-1)^n$.
Montrer que $< P_n|P_m >= 0$ équivaut à montrer que $I := \int_{-1}^{1} q_n^{(n)} q_m^{(m)} = 0$.
Or, par intégration par partie (I.P.P) et pour $n < m$ (*on fait donc "baisser" n*)

$$\begin{aligned} I = \int_{-1}^{1} q_n^{(n)} q_m^{(m)} &= [q_n^{(n)} q_m^{(m-1)}]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} q_n^{(n+1)} q_m^{(m-1)} \\ &= -\int_{-1}^{1} q_n^{(n+1)} q_m^{(m-1)}, \quad \text{par la remarque ci-dessous appliquée à } q_m^{(m-1)}. \end{aligned}$$

Remarque : pour tout $k < n$, $q_n^{(k)}(1) = q_n^{(k)}(-1) = 0$.
Dém. de la remarque : Par définition de $q_n(X) = (X^2-1)^n = (X-1)^n(X+1)^n$ les nombres 1 et -1 sont racines de q_n de mulitplicité n. □
En refaisant $n-1$ fois l'opération ("dériver q_n, primitiver q_m"), à chaque étape les crochets sont encore nuls par la remarque et on obtient :

$$\begin{aligned} I &= (-1)^n \int_{-1}^{1} q_n^{(2n)} q_m^{(m-n)} \\ &= (-1)^n (2n)! \int_{-1}^{1} q_m^{(m-n)} \quad \text{par a),} \\ &= (-1)^n (2n)! \, [q_m^{(m-n-1)}]_{-1}^{1}, \quad \text{ce qui a du sens car } m-n-1 \geq 0 \\ &= 0. \quad \text{par la remarque } \square \end{aligned}$$

ii)

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x-1)^n(x+1)^n] = \frac{1}{2^n\, n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}[(x-1)^n]^{(n-k)}[(x+1)^n]^{(k)}, \quad \text{par Leibniz,}$$

Si on évalue l'égalité précédente en 1 tous les termes de la somme à gauche sauf le terme d'indice 0 seront nuls car 1 est racine de $(x-1)^n$ de multiplicité n.
Donc

$$\begin{aligned} L_n(1) &= \frac{1}{2^n\, n!}\,(n!2^n + \sum_{k=1}^{n} 0), \\ L_n(1) &= 1. \end{aligned}$$

Comme ici les conditions du b) sont vérifiées, on sait que :

$$L_{n+1} = a_n X L_n + c_n L_{n-1}$$

et en évaluant cette égalité en 1, on a :

$$\boxed{1 = a_n + c_n}$$

iii) Par déf. de L_n le coefficient de X^n dans L_n, est

$$CD(L_n) = \frac{1}{2^n n!}((2n)(2n-1)\dots(n+1)) = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}.$$

Or dans la formule (†), $CD(L_{n+1}) = a_n CD(L_n)$ donc :

$$\frac{(2n+2)!}{2^{n+1}((n+1)!)^2} = a_n \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$$

On conclut que

$$\boxed{a_n = \frac{1}{2}\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{2n+1}{n+1}}$$

ce qui dans la formule du (ii) donne :

$$\boxed{c_n = -\frac{n}{n+1}}$$

d) (i) **Unicité :** si on a deux polynômes T_n et S_n tels que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(\theta)) = S_n(\cos(\theta)$ alors T_n et S_n coïncident sur $[-1,1] = \cos(\mathbb{R})$ donc sont égaux partout car la différence $S_n - T_n$ est un polynôme qui a une infinité de racines.

Existence (et relation de récurrence en même temps !) : On va construire la suite (T_n) par récurrence.

• On pose $T_0 = 1$ et $T_1 = X$ qui conviennent.

• H.R. on suppose que pour un $n \in \mathbb{N}^*$, on a construit T_n et T_{n-1}.

On remarque que :

$$\begin{aligned} \cos((n+1)\theta) &= \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta) \\ &= \cos(n\theta)\cos(\theta) - \frac{1}{2}(\cos(n\theta - \theta) - \cos(n\theta + \theta)) \end{aligned}$$

Donc pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos((n+1)\theta)) = 2\cos(n\theta)\cos(\theta) - \cos((n-1)\theta)$$

Avec l'H.R. on en déduit que :

$$\cos((n+1)\theta)) = 2T_n(\cos(\theta)\cos(\theta) - T_{n-1}(\cos(\theta)).$$

En posant $T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X) \in \mathbb{R}[X]$ on a bien trouvé un polynôme $T_{n+1} \in \mathbb{R}[X]$ qui donne la propriété H_{n+1}.

La récurrence est établie.

Remarque. : il y a bien sûr une autre méthode pour obtenir une formule explicite de T_n comme somme à partir de la formule de De Moivre.

(ii) On justifie d'abord que les T_n sont dans E_φ.

Ici φ est intégrable sur $]-1,1[$, par exemple parce qu'on sait la primitiver en arcsin et que cette primitive a une limite finie en 1 et -1 (ou alors avec l'équivalent à $\dfrac{c}{(1-t)^{1/2}}$ quand $t \to 1$ et de même en -1).

D'autre part pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, par déf. :

$$(T_n|T_m) = \int_{-1}^{1} \frac{T_n(t)T_m(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt,$$

en posant $\theta = \text{Arccos}(t)$, chgt de var. $\mathcal{C}^1$ stmt décroissant sur $]-1,1[$

$$(T_n|T_m) = \int_0^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)d\theta.$$

Par calcul souvent fait en Fourier (linéarisation du produit des cosinus avec $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))$), à faire ici !)) on conclut que $\boxed{(T_n|T_m) = 0}$.

(iii) Déjà fait au (i) : $\boxed{T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X)}$.

e) La relation de réc. s'écrit aussi

$$P_{n+1} + \alpha_n P_n + \beta_n P_{n-1} = XP_n \quad (0)$$

(i) En prenant le p.s. des deux membres de cette égalité avec P_n, on a :

$$\alpha_n ||P_n||^2 = (XP_n|P_n) \quad (1)$$

ce qui est la première affirmation de l'énoncé

Pour montrer que $\alpha_n \in I$, on suit l'indication de l'énoncé : on exhibe une intégrale de la forme $\int_a^b (t-\alpha_n)\varphi(t)dt$ avec $\varphi > 0$, qui est nulle.

Avec la formule (1) précédente on a $\alpha_n \int_a^b P_n(t)^2\varphi(t)dt = \int_a^b tP_n(t)^2\varphi(t)dt$.

Donc en regroupant tout dans un seul membre $\int_a^b (t-\alpha_n)P_n(t)^2\varphi(t)dt = 0 \quad (2)$.

Par l'absurde, si $\alpha_n \notin I$

Dans ce cas $t \mapsto (t-\alpha_n)P_n(t)^2\varphi(t)$ est **continue de signe constant sur** I, avec (2) on conclut que $t \mapsto (t-\alpha_n)P_n(t)^2\varphi$ est identiquement nulle sur $]a,b[$ et donc par la propriété de φ, que $t \mapsto P_n(t)$ est identiquement nulle sur un sous-ensemble dense de $]a,b[$ donc nulle sur un $]a,b[$ par continuité, et en fait que $P_n = 0$ le polynôme nul, *contradiction.*

(ii) En prenant le p.s. des deux membres de (0) avec P_{n-1} on a :

$$\beta_n ||P_{n-1}||^2 = (XP_n|P_{n-1}) \quad (2)$$

Or $(XP_n|P_{n-1}) = (P_n|XP_{n-1})$

Or comme P_n et XP_{n-1} sont tous les deux de coeff. dominant 1, $P_n - XP_{n-1} \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et donc $(P_n|P_n - XP_{n-1}) = 0$. Ainsi $(P_n|XP_{n-1}) = (P_n|P_n)$.

Au total on a bien obtenu que :

$$\beta_n ||P_{n-1}||^2 = (P_n|P_n)$$

3 Propriétés des racines

Soit (P_n) une suite de polynômes orthogonaux.

Sans restriction de généralité, on peut multiplier les P_n par une constante, ce qui ne change pas leurs racines, pour supposer que tous les P_n sont de coefficient dominant 1, ce qui permettra d'utiliser les résultats du 2.e)

a) On suppose *par l'absurde* que P_n admet $r < n$ racines dans $]a, b[$, et on note $x_1 < \cdots < x_s$ où P_n s'annule en changeant de signe. Ainsi $P(X) = \prod_{k=1}^{s}(X - x_k)^{\omega_k} R(x)$ avec les ω_k impairs et R de signe constant sur $\mathbb{R}$.

On note $Q(x) = (x - x_1)\dots(x - x_s)$.

Alors $(P_n|Q) = 0$, mais $P_n Q$ ne change plus de signe car tous les changements de signes se compensent donc $\displaystyle\int_a^b P_n Q w$ serait l'intégrale d'une fonction continue de signe constant qui donne zéro, et la fonction n'est pas la fonction nulle, *contradiction.*

b) (i) Avec la relation de réc. $P_{n+1}(X) = (X - \alpha_n)P_n(X) - \beta_n P_{n-1}(X) \quad (*)$, on va ici (en prélude aux autres récurrences à suivre) démontrer *par réc.* que P_n et P_{n-1} n'ont pas de racine commune pour tout $n \geq 1$.

• Pour $n = 1$ c'est évident car $P_0 = 1$ donc P_0 n'a pas de racine.

• Supposons la prop. vraie pour un $n \geq 1$ *Par l'absurde* si P_n et P_{n+1} avaient une racine commune λ alors en évaluant en λ dans $(*)$ on obtient que $P_{n-1}(\lambda) = 0$ donc λ serait en part. racine commune de P_n et P_{n-1} ce qui est exclu par H.R.

La réc. est établie.

(ii) Encore avec la relation de réc. $(*)$ évaluée en une racine λ de P_n, on obtient

$$P_{n+1}(\lambda) = -\beta_n P_{n-1}(\lambda),$$

et comme on a vu que $\beta_n > 0$, on a bien la conclusion $P_{n+1}(\lambda)$ et $P_{n-1}(\lambda)$ sont de signe opposés (et ils sont non nul par (i)).

(iii) En notant λ l'unique racine de P_1, $P_1 = (X - \lambda)$, et par (ii), $P_2(\lambda) < 0$.

Comme P_2 est unitaire, P_2 est positif au voisinage de $\pm\infty$ et par T.V.I. P_2 admet deux racines, une dans $]-\infty, \lambda[$ et l'autre dans $]\lambda, +\infty[$.

(iv) (1) Notons $\mu_1 < \cdots < \mu_{n-1}$ les racines de P_{n-1} dans l'ordre croissant.

Par $H(n)$, on sait que $\lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \cdots < \mu_{k-1} < \lambda_k < \mu_k < \cdots < \lambda_{n-1} < \mu_{n-1} < \lambda_n$.

Alors $P_{n-1}(X) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n-1}(X - \mu_i)$ et $P_{n-1}(\lambda_k) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n-1}(\lambda_k - \mu_i)$.

Avec $H(n)$ on sait le signe de ce produit : les $k-1$ premiers facteurs $\lambda_k - \mu_i$ pour $i = 1, \dots, k-1$ sont positifs, $(n-1) - (k-1) = n - k$ facteurs suivants sont négatifs.

Ainsi le signe de $P_{n-1}(\lambda_k)$ est celui de $(-1)^{n-k}$.

Avec la formule de récurrence, on a montré au b) que le signe de $P_{n+1}(\lambda_k)$ est opposé de celui de $P_{n-1}(\lambda_k)$ donc on conclut bien que $P_{n+1}(\lambda_k)$ a le signe opposé de $(-1)^{n-k}$ d'où la formule de l'énoncé.

(2) La formule du (1) dit que le polynôme P_{n+1} change de signe sur chaque intervalle $]\lambda_k, \lambda_{k+1}[$ pour $k = 1, \dots, n-1$ ce qui, par TVI, donne déjà $n-1$ racines distinctes pour P_{n+1} bien comprises dans les intervalles $]\lambda_k, \lambda_{k+1}[$. Enfin, P_{n+1} est positif au voisinage de $+\infty$ car de monôme dominant X^{n+1}, et $P_{n+1}(\lambda_n)$ est négatif, donc P_{n+1} admet bien une racine dans $]\lambda_n, +\infty[$.

En $-\infty$, P_{n+1} est du signe de $(-1)^{n+1}$ grâce à son monôme dominant X^{n+1} et $P_{n+1}(\lambda_1)$ est du signe opposé donc encore par T.V.I, on a la dernière racine de P_{n+1} dans $]-\infty, \lambda_1[$. Ainsi P_{n+1} est vraie ce qui montré l'hérédité !