Banque CCINP : 76, 77, 79, 80, 81, 82.

Approximation uniforme, Weierstrass

Exercice 1 (Ecrit CCP 2015)**.** Soit $f\ :\ ]0,1]\to\mathbb{R},\ x\mapsto\dfrac{1}{x}$. Montrer que f ne peut pas être limite uniforme sur $]0,1]$ d'une suite de polynômes.

Exercice 2. En adaptant la preuve du théorème d'approximation uniforme par les fonctions en escaliers, démontrer que toute fonction continue sur un segment et à valeurs dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, est limite uniforme d'une suite de fonctions continues, affines par morceaux.

Exercice 3. Soit D le disque unité fermé de $\mathbb{C}$.

a) Montrer que l'application $(\mathcal{C}(D,\mathbb{C}),\|\ \|_\infty)\to\mathbb{C},\ f\mapsto\displaystyle\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})d\theta$ est continue.

b) Montrer que pour toute fonction polynomiale $f\in\mathbb{C}[z]$, $\varphi(f)=2\pi f(0)$.

c) En déduire que $\mathbb{C}[z]$ n'est pas dense dans $(\mathcal{C}(D,\mathbb{C}),\|\ \|_\infty)$.

Espaces préhilbertiens

Exercice 4. Soit $E=\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et $\Phi\ :\ f\mapsto\Big[\displaystyle\int_0^1 f'(t)^2dt+f(0)f(1)\Big]^{1/2}$.

Montrer que Φ est une norme euclidienne sur E, c'est-à-dire qu'il existe un produit scalaire φ de E tel que pour tout $f\in E$, $\Phi(f)=\sqrt{\varphi(f,f)}$.

Exercice 5. Montrer que pour tout $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ et $(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ on a :

$$\Big(\sum_{i=1}^n|x_iy_i|\Big)^2\le\Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big).\Big(\sum_{i=1}^n y_i^2\Big).$$

Exercice 6. a) Définir l'e.v. préhilbertien l^2 (*explicitement dans le programme*).

b) Déterminer l'orthogonal dans l^2 du s.e.v. formé par les suites nulles APCR.

Exercice 7. Soit $E=\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

On cherche à montrer que l'ensemble $\mathcal{A}=\Big\{\displaystyle\int_0^1|x^2-ax-b|^2\,dx,(a,b)\in\mathbb{R}^2\Big\}\subset\mathbb{R}$ admet un minimum et à calculer ce minimum.

a) Définir un produit scalaire adapté sur E pour interpréter géométriquement la question posée. (On justifiera les propriétés du produit scalaire).

b) Montrer alors que ce minimum est atteint pour un unique couple $(a_0,b_0)\in\mathbb{R}^2$ que l'on déterminera. Calculer aussi la valeur $\min(\mathcal{A})$ obtenue.

Exercice 8. Soit F et G deux s.e.v. supplémentaires d'un espace euclidien. Les s.e.v. $F^\perp$ et $G^\perp$ sont-ils supplémentaires ?
Indication – Aller voir l'ex. 77 de la banque INP.

Exercice 9. Soit $E=\mathbb{R}_2[x]$ muni du p.s. $(P,Q)\mapsto\displaystyle\int_{-1}^1PQ$.

a) Calculer la base $(\varepsilon_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ obtenue par orthonormalisation de Gram-Schmidt à partir de la base canonique (e_0,e_1,e_2) où $e_i(x)=x^i$.

b) Déterminer pour chaque $i=0,1,2$, le maximum de la fonction $|\varepsilon_i|$ sur $[-1,1]$.

c) Soit $f\in\mathbb{R}_2[x]$ telle que $\displaystyle\int_{-1}^1f(t)^2dt=1$.

Déduire de ce qui précède une majoration de $\sup_{t\in[-1,1]}|f(t)|$.

d) Donner une minoration de ce même sup. et en déduire deux constantes C et C' explicites telles que pour tout $f\in E$, $C\|f\|_2\le\|f\|_\infty\le C'\|f\|_2$ où $\|f\|_2=\sqrt{\displaystyle\int_{-1}^1f(t)^2dt}$.

Exercice 10. a) Donner une exemple de s.e.v. F strict qui est dense dans un espace préhilbertien E. b) Que peut-on en déduire pour $F^\perp$?

c) Soit F un s.e.v. de codimension finie d'un e.v. préhilbertien.

Montrer que $\dim(F^\perp)\le\mathrm{codim}(F)$ et montrer que l'inégalité peut-être stricte en considérant $E=\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ avec $(f|g)=\displaystyle\int_0^1fg$ et $F=\{f\in E,\ f(0)=0\}$.