Janvier 2022

MP2 D.S. 5

Les calculatrices ne sont PAS autorisées Encadrez/soulignez sinon vous ne serez pas lu. Bon courage !

Exercice :

On admet que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et on pose $A = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

a) Démontrer que la famille $\left(\frac{1}{p^2q^2}\right)_{(p,q)\in A}$ est sommable et calculer sa somme.

b) Démontrer que la famille $\left(\frac{1}{p^2+q^2}\right)_{(p,q)\in A}$ n'est pas sommable.

Problème

Ce problème aborde l'étude d'une transformation intégrale utilisée pour le traitement des signaux analogiques : la transformation de Fourier, qui permet de modéliser le comportement fréquentiel d'un signal. La partie 1 en étudie quelques propriétés générales, la partie 2 aboutit à la formule d'inversion de Fourier qui permet de retrouver un signal à partir de sa transformée de Fourier. La partie 3 traite le cas particulier d'un signal dont le spectre des fréquences est limité à $[-1/2, 1/2]$. La partie 4 étudie le cas particulier d'un signal périodique. Le résultat auquel elle aboutit est utilisé dans la partie 5 pour démontrer le théorème de l'échantillonnage de Shannon.

On note

- E_{cpm} le $\mathbb{C}$ espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ et intégrables sur $\mathbb{R}$;
- $\mathcal{S}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall k \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^k f(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

1 Transformation de Fourier

Pour toute fonction $f \in E_{cpm}$, on considère la fonction $\mathcal{F}(f)$ (*transformée de Fourier de* f) définie par

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2\pi i t\xi}\, dt$$

Q1) On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Justifier que φ appartient à E_{cpm} et calculer sa transformée de Fourier $\mathcal{F}(\varphi)$.

Q2) On considère la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \psi(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \quad \text{et} \quad \psi(0) = 1$$

Q2.a) **(5/2 seulement)** Justifier que ψ est développable en série entière. Préciser ce développement ainsi que son rayon de convergence. En déduire que ψ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
(3/2 on pourra utiliser ce dernier résultat par la suite)

Q2.b) Prouver

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_n^{n+1} |\psi(x)| \, dx \geq \frac{2}{\pi^2(n+1)}$$

En déduire que ψ n'appartient pas à E_{cpm}.

Q3) Soit $f \in E_{cpm}$. montrer que la fonction $\mathcal{F}(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Q4) Soit $f \in \mathcal{S}$.

Q4.a) Justifier que, pour tout entier naturel n, la fonction $x \mapsto x^n f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Q4.b) Démontrer que la fonction $\mathcal{F}(f)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall \xi \in \mathbb{R}, \ (\mathcal{F}(f))^n(\xi) = (-2i\pi)^n \int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t) e^{-2i\pi\xi t} \, dt$$

Q5) On considère la fonction $\theta \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $\theta(x) = \exp(-\pi x^2)$, pour $x \in \mathbb{R}$.

Q5.a) justifier que $\theta \in \mathcal{S}$ et que $\mathcal{F}(\theta)$ est solution de l'équation différentielle

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \ y'(\xi) = -2\pi\xi y(\xi)$$

Q5.b) Etablir que $\mathcal{F}(\theta) = \theta$.
On admettra que $\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x) \, dx = 1$.

2 Formule d'inversion de Fourier

Soit $f \in \mathcal{S}$. on suppose que $\mathcal{F}(f)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour tout entier naturel non nul n, on pose

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi)\theta\left(\frac{\xi}{n}\right) \, d\xi \qquad J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{t}{n}\right) \mathcal{F}(\theta)(t) \, dt$$

Q6) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi) \, d\xi$.

Q7) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} J_n$.

Q8) Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ I_n = J_n$.
On admettra la formule de Fubini :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\theta\left(\frac{\xi}{n}\right) e^{-2i\pi\xi t} \, d\xi \right) \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\theta\left(\frac{\xi}{n}\right) e^{-2i\pi\xi t} \, dt \right) \, d\xi$$

Q9) Démontrer que $f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi) \, d\xi$.
En déduire en utilisant la fonction $h \ : \ t \mapsto f(x+t)$, que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi) e^{2i\pi x\xi} \, d\xi \tag{2.1}$$

Cette formule permet de reconstruire le signal f à partir de sa transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$.

Q10) Une application
Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2i\pi\xi x}}{1+(2\pi\xi)^2} \, d\xi = \frac{1}{2}e^{-|x|}$.

3 Transformée de Fourier à support compact

Soit f une fonction de $\mathcal{S}$ dont la transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$ est nulle en dehors du segment $[-1/2, 1/2]$. D'après la relation (2.1), on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_{-1/2}^{1/2} \mathcal{F}(f)(\xi) e^{2i\pi x\xi}\, d\xi$$

Q11) Démontrer que $\mathcal{F}(f)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{S}$. En déduire que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Q12) Prouver que

$$\forall (x, x_0) \in \mathbb{R}^2,\ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} \int_{-1/2}^{1/2} (2i\pi\xi)^k \mathcal{F}(f)(\xi) e^{2i\pi x_0 \xi}\, d\xi = f(x)$$

Q13) **(5/2 seulement)** On suppose que f est nulle en dehors d'un segment $[a, b]$. Montrer que $f = 0$.

4 Cas de fonctions périodiques

Pour tout entier naturel n, on note S_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{2\pi i k x}$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et 1-périodique. On considère :

- la fonction g définie sur $[-1, 1]$ par

$$\forall x \in]-1, 1[\setminus \{0\},\ g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{\sin(\pi x)} \qquad g(0) = 0 \qquad g(1) = g(-1) = -g(0)$$

- la suite de complexes $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f) = \int_{-1/2}^{1/2} f(x) e^{-2\pi i n x}\, dx$$

Q14) Régularité de g :

Q14.a) Montrer que la fonction g est de classe C^1 sur $]-1, 1[\setminus \{0\}$ et continue sur $]-1, 1[$.

Q14.b) Calculer la limite de g' en 0. En déduire que g est de classe C^1 sur $]-1, 1[$.
On admet dorénavant que g est de classe C^1 sur $[-1, 1]$.

Q15) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer l'intégrale $\int_{-1/2}^{1/2} S_n(x)\, dx$.

Q16) Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \setminus \{0\},\ S_n(x) = \frac{\sin((2n+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}$$

Q17) Justifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) = f(0) + \int_{-1/2}^{1/2} g(x) \sin((2n+1)\pi x)\, dx$$

Q18) A l'aide d'une intégration par parties, montrer l'existence d'un réel C tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left| \int_{-1/2}^{1/2} g(x) \sin((2n+1)\pi x)\, dx \right| \leq \frac{C}{2n+1}$$

Q19) Soit $t \in [-1/2, 1/2]$. On considère la fonction G_t définie sur $[-1/2, 1/2]$ par

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \; G_t(x) = f'(x+t)\sin(\pi x) - (f(x+t) - f(t))\pi\cos(\pi x)$$

Etablir l'existence d'un réel D, indépendant de x et de de t, tel que

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \; \forall t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \; |G_t(x)| \leq Dx^2$$

Q20) Prouver l'existence d'un réel E tel que

$$\forall t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \; \left| f(t) - \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{2i\pi kt} \right| \leq \frac{E}{2n+1} \tag{4.1}$$

On pourra introduire la fonction $h_t \; : \; x \mapsto f(x+t)$.

5 Formule d'échantillonage de Shannon

Soit $f \in \mathcal{S}$ dont la transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$ est nulle en dehors du segment $[-1/2, 1/2]$. On pose

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \; \forall x \in \mathbb{R}, \; \psi_k(x) = \psi(x+k) \tag{5.1}$$

où ψ est définie à la question 2.

Q21) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}, \; (\mathcal{F}(f))^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right) = (\mathcal{F}(f))^{(n)}\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.

Q22) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$, qui est 1-périodique et qui vaut $\mathcal{F}(f)$ sur l'intervalle $[-1/2, 1/2]$. Montrer que h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Q23) A l'aide de l'inégalité (4.1), prouver l'existence d'une suite de nombres complexes $(d_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ telle que la suite de fonctions $\left(x \mapsto \sum_{k=-n}^{n} d_k e^{2\pi ikx}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\mathcal{F}(f)$ sur $[-1/2, 1/2]$.

Q24) Démontrer que la suite de fonctions $\left(\sum_{k=-n}^{n} d_k \psi_k\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.
On notera symboliquement $f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k \psi_k$.

Q25) Etablir que $\forall j \in \mathbb{Z}, \; f(-j) = d_j$.

Conclusion : L'égalité obtenue :

$$f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(-k)\psi_k$$

traduit la reconstruction du signal f à partir de l'échantillon $(f(k))_{k \in \mathbb{Z}}$.