CORRIGÉ de l'épreuve de MATHS 1 des ENSI - 2002 - Filière MP

Autour des produits infinis

I. Généralités et exemples

1. Supposons que le produit infini $\prod_{n\geq 0} u_n$ converge, donc que la suite $(P_n)_{n\geq 0}$ admet une limite finie $\ell \neq 0$.

Alors nécessairement $u_{n+1} = \dfrac{P_{n+1}}{P_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\ell}{\ell} = 1$.

2.

a. $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \geq 0 \ /\ \forall\, n \geq n_0,\ 1 - \varepsilon < u_n < 1 + \varepsilon$.
En prenant $\varepsilon = 1$, on obtient : $\exists\, n_0 \geq 0 \ /\ \forall\, n \geq n_0,\ 0 < u_n$.

b. Posons $P'_n = \prod_{k=n_0}^{n} u_k$ pour $n \geq n_0$. Alors $\forall\, n \geq 0,\ P_n = \prod_{k=n_0}^{n} u_k = \prod_{k=0}^{n_0-1} u_k \times \prod_{k=n_0}^{n} u_k = P_{n_0-1} \times P'_n$.

Comme $P_{n_0-1} \neq 0$, les deux suites $(P_n)_{n\geq 0}$ et $(P'_n)_{n\geq n_0}$ sont de même nature, donc les produits infinis $\prod_{n\geq 0} u_n$ et $\prod_{n\geq n_0} u_n$ sont de même nature.

3. On suppose que $\forall\, n \geq 0,\ u_n > 0$. On pose $S_n = \ln(P_n) = \sum_{n=0}^{n} \ln u_k$. On a aussi $P_n = \mathrm{e}^{S_n}$.

a. $*$ Si le produit infini $\prod_{n\geq 0} u_n$ converge, alors la suite $(P_n)_{n\geq 0}$ admet une limite finie $\ell \neq 0$, donc $\ell > 0$ et en composant par la fonction logarithme continue sur $]0, +\infty[$, $S_n = \ln(P_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ln \ell$, ce qui prouve que la série $\sum_{n\geq 0} \ln u_n$ converge.

$*$ Si la série $\sum_{n\geq 0} \ln u_n$ converge, alors la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ admet une limite finie L et en composant par la fonction exponentielle continue sur $\mathbf{R}$, $P_n = \mathrm{e}^{S_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^L \neq 0$, ce qui prouve que le produit infini $\prod_{n\geq 0} u_n$ converge.

Remarque importante : dans ces conditions, $\ell = \mathrm{e}^L$ et $L = \ln \ell$, c'est à dire :

$$\boxed{\prod_{n=0}^{+\infty} u_n = \exp\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(u_n)\right) \ \text{(I)} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(u_n) = \ln\left(\prod_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \ \text{(II)}.}$$

b. $*$ Si le produit infini $\prod_{n\geq 0}(1 + u_n)$ converge, alors d'après le **1**, nécessairement $\lim_{n\to\infty}(1 + u_n) = 1$, c'est à dire $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.
Ainsi $\ln(1 + u_n) \underset{n\to\infty}{\sim} u_n$. D'autre part, d'après le **3.**a, la série $\sum_{n\geq 0} \ln(1 + u_n)$ converge, donc la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge d'après le théorème de l'équivalent des séries à termes réels posifis.

$*$ Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, alors $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, donc $\ln(1 + u_n) \underset{n\to\infty}{\sim} u_n$. Il en résulte que la série $\sum_{n\geq 0} \ln(1 + u_n)$ converge, donc d'après le **3.**a, le produit infini $\prod_{n\geq 0}(1 + u_n)$ converge.

c. Il suffit de reprendre la démonstration du **3.**b sachant que comme $0 < u_n < 1$, alors $1 - u_n > 0$.
Le théorème de l'équivalent des séries reste applicable car les deux suites équivalentes $\big(\ln(1 - u_n)\big)_{n\geq 0}$ et $(-u_n)_{n\geq 0}$ sont de signe constant négatif.

4. a. $\prod_{n\geq 1}\left(1 - \dfrac{1}{4n^2}\right)$ converge d'après le **3.**c en prenant $u_n = \dfrac{1}{4n^2}$ puisque $\forall\, n \geq 1,\ 0 < u_n < 1$.

b. $\displaystyle\prod_{n\geq 1}\Big(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\Big)$ converge de même en prenant ici $u_n=\dfrac{x^2}{n^2\pi^2}\in]0,1[$ puisque $|x|<\pi$.

c. $\forall\, n\geq 1,\ \forall\, x>0,\ u_n(x)=\big(1+\dfrac{x}{n}\big)\,\mathrm{e}^{\frac{-x}{n}}>0$ et $\ln\big(u_n(x)\big)=-\dfrac{x}{n}+\ln\big(1+\dfrac{x}{n}\big)=O\big(\dfrac{x}{n^2}\big)$, donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\ln\big(u_n(x)\big)$ converge.

En appliquant le **3.**a, on en déduit que le produit infini $\displaystyle\prod_{n\geq 1}u_n(x)$ converge pour tout $x>0$.

5a. D'après **3.**b, pour montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ diverge, il suffit de montrer que la produit infini $\displaystyle\prod_{n\geq 1}\big(1+\frac{1}{n}\big)$ diverge.

Or ici $P_n=\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\big(1+\frac{1}{k}\big)=\prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}=\frac{n+1}{1}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}+\infty.$

b. Pour $p\geq 2$, la série géométrique $\displaystyle\sum_{k\geq 0}\Big(\frac{1}{p}\Big)^k$ de raison $\dfrac{1}{p}$ converge et a pour somme $\dfrac{p}{p-1}$.

c. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{p_n}$ diverge revient d'après le **3.**c à montrer que le produit infini $\displaystyle\prod_{n\geq 1}\Big(1-\frac{1}{p_n}\Big)$ diverge.

(M1) Soit $n\geq 2$.
(i) D'une part, les diviseurs premiers d'un entier $m\in[1,n]$ sont nécessairement inférieurs ou égaux n, donc sont de la forme p_k avec $k\leq n$ (puisque $n\geq p_k\geq k$).
Donc chaque $m\in[1,n]$ s'écrit, de manière unique, $m=p_1^{\alpha_1}\dots p_n^{\alpha_n}$ où les α_i sont des entiers positifs ou nuls, nécessairement inférieurs ou égaux n, puisque $\alpha_i\leq p_i^{\alpha_i}\leq m\leq n$.
(ii) d'autre part, le 5.b), permet de minorer $\dfrac{1}{1-\frac{1}{p_k}}$ par $\displaystyle\sum_{\alpha_k=0}^{n}\frac{1}{p_k^{\alpha_k}}$,

Donc il vient :

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}\geq\prod_{k=1}^{n}(\sum_{\alpha_k=0}^{n}p_k^{-\alpha_k})=\sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in[0,n]^n}\frac{1}{p_1^{\alpha_1}}\cdots\frac{1}{p_n^{\alpha_n}}\geq\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}=:H_n\qquad(\dagger)$$

la première inégalité étant donnée par (ii), la seconde par (i).
Comme on sait que $H_n\to+\infty$, on conclut que $\prod_{k=1}^{n}\dfrac{1}{1-\frac{1}{p_k}}\to+\infty$ et donc $\displaystyle\prod_{n\geq 1}\Big(1-\frac{1}{p_n}\Big)$ diverge.

(M2) On peut remplacer la première inégalité dans $(\dagger)$ par une égalité

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1-\frac{1}{p_n}}=\prod_{k=1}^{n}\sum_{\alpha_k=0}^{+\infty}\frac{1}{p_k^{\alpha_k}}\qquad(1)$$

et par le cours sur les familles sommables, écrire :

$$\prod_{k=1}^{n}\sum_{\alpha_k=0}^{+\infty}\frac{1}{p_k^{\alpha_k}}=\sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbf{N^n}}\frac{1}{p_1^{\alpha_1}\dots p_n^{\alpha_n}}\qquad(2)$$

on finit comme dans $(\dagger)$ par la minoration :

$$\sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbf{N^n}}\frac{1}{p_1^{\alpha_1}\dots p_n^{\alpha_n}}\geq H_n$$

II. Développement eulérien du sinus et formule de Wallis

6. f_α étant paire, les coefficients $b_n(f_\alpha)$ sont nuls. **Attention :** pour le calcul qui suit, on suppose que $\alpha \notin \mathbf{Z}$

$\forall n \geq 0,\ a_n(f_\alpha) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \cos(\alpha t)\,\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{\pi}\int_0^\pi \big[\cos(\alpha+n)t + \cos(\alpha-n)t\big]\,\mathrm{d}t,$

d'où $a_n(f_\alpha) = \dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{\sin(\alpha+n)t}{\alpha+n} + \dfrac{\sin(\alpha-n)t}{\alpha-n}\right]_{t=0}^{t=\pi} = \dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{(-1)^n\sin(\alpha\pi)}{\alpha+n} + \dfrac{(-1)^n\sin(\alpha\pi)}{\alpha-n}\right],$

donc $\boxed{a_n(f_\alpha) = \dfrac{(-1)^n\sin(\alpha\pi)}{\pi}\,\dfrac{2\,\alpha}{\alpha^2-n^2}.}$

D'aprs le rsultat admis par l'énoncé $\forall x \in \mathbf{R},\ f_\alpha(x) = \dfrac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\left[\dfrac{1}{\alpha} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n 2\alpha}{\alpha^2-n^2}\,\cos(nx)\right].$

En se plaçant en $x=\pi$, sachant que $\cos(n\pi) = (-1)^n$, on obtient : $\cos(\alpha\pi) = \dfrac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\left[\dfrac{1}{\alpha} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2\,\alpha}{\alpha^2-n^2}\right]$

Ainsi $\boxed{\operatorname{cotan}(\alpha\pi) = \dfrac{1}{\alpha\pi} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2\,\alpha}{\pi(\alpha^2-n^2)},\ \text{pour chaque } \alpha \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}.}$

7. $0 < x < \pi$ et $g(0) = 0$ et $g(t) = \operatorname{cotan} t - \dfrac{1}{t}$ si $t \in]0,x]$.

a. Il est clair que g est déjà continue sur $]0,x]$ car $0 < x < \pi$ par théorèmes généraux.

$\forall t \in]0,x],\ g(t) = \dfrac{\cos t}{\sin t} - \dfrac{1}{t} = \dfrac{t\,\cos t - \sin t}{t\,\sin t} = \dfrac{t\big(1+o(t)\big) - \big(t+o(t^2)\big)}{t^2+o(t^2)} = \dfrac{o(t^2)}{t^2+o(t^2)} = o(1)$, donc $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} g(t) = 0$.

Ainsi <u>g est continue sur $[0,x]$</u>.

Si $0 < a < x < \pi$, alors $\displaystyle\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x \dfrac{\cos t}{\sin t}\,\mathrm{d}t - \int_a^x \dfrac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right) - \ln\left(\dfrac{\sin a}{a}\right).$

Comme $\displaystyle\lim_{a\to 0^+}\dfrac{\sin a}{a} = 1$, on en déduit que $\displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{a\to 0^+}\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t = \boxed{\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right).}$

b.

L'identité du 6), $\operatorname{cotan}(\alpha\pi) = \dfrac{1}{\alpha\pi} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2\alpha}{\pi\,(\alpha^2-n^2)}$ valable pour $\alpha \in]0,\pi[$ donne en posant $t = \alpha\pi$:

$\forall t \in]0,\pi[,\ \operatorname{cotan} t - \dfrac{1}{t} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2\,t}{t^2-n^2\pi^2}$ et puisque $g(0) = 0$, $\boxed{\forall t \in [0,x],\ g(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2\,t}{t^2-n^2\pi^2}.}$

c. On pose $g_n(t) = \dfrac{2\,t}{t^2-n^2\pi^2}$. On constate que $\forall n \geq 1,\ \big\|g_n\big\|_\infty^{([0,x])} = \dfrac{2\,x}{x^2-n^2\pi^2} = O\big(\dfrac{1}{n^2}\big)$, ce qui montre la convergence normale sur $[0,x]$ de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} g_n$. On peut donc intégrer terme à terme sur ce SEGMENT, ce qui donne :

$$\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^x \frac{2\,t}{t^2-n^2\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\Big[\ln\big|t^2-n^2\pi^2\big|\Big]_{t=0}^{t=x} = \sum_{n=1}^{+\infty}\Big[\ln\big(n^2\pi^2-x^2\big) - \ln(n^2\pi^2)\Big] = \sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Ainsi $\boxed{\forall\ x \in]0,\pi[,\ \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1-\dfrac{x^2}{n^2\pi^2}\right).}$

En utilisant la formule (I) vue à la fin du **3.**a et compte-tenu de la convergence de l'exemple **4.b**, on a :

$\forall x \in]0,\pi[,\ \displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\dfrac{x^2}{n^2\pi^2}\right) = \exp\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1-\dfrac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\right) = \exp\left(\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)\right) = \dfrac{\sin x}{x}.$

L'égalité précédente est encore valable pour $-\pi < x < 0$ par parité des deux membres et l'égalité suivante est encore valable en 0 :

$$\boxed{\sin x = x\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\ \text{pour } x \in]-\pi,\pi[.}$$

8. *Application* : pour $x = \dfrac{\pi}{2}$, on obtient $\boxed{\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\Big(1-\frac{1}{4\,n^2}\Big) = \frac{2}{\pi}.}$

Remarque: cette formule s'obtient aussi avec les intégrales de Wallis, d'o son nom ici.

III. Formule de Weiesrtrass et constante d'Euler

9. Il s'agit d'une question faite en cours sur la fonction Gamma d'Euler (*points faciles à gagner*).

Voir le corrigé dans le cours. On trouve que $\underline{\Gamma(1) = 1}$ et que $\underline{\displaystyle\forall\, x>0,\ \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,t^{x-1}\,\mathrm{d}t.}$

10. Fait en exercice.

11. L'intégrale généralisée $I_n(x) = \displaystyle\int_0^1 (1-u)^n\,u^{x-1}\,\mathrm{d}u$ est convergente en 0 par comparaison aux intégrales de Riemann puisque $(1-u)^n u^{x-1} \sim u^{x-1}$ pour $u \to 0$ et $x-1 > -1$.

a. Effectuons une intégration par parties sur $[a,1]$ d'abord avec $0 < a < 1$.
On prend $\varphi(u) = (1-u)^n$ et $\psi'(u) = u^{x-1}$, d'où $\varphi'(u) = -n\,(1-u)^{n-1}$ et $\psi(u) = \dfrac{u^x}{x}$.
Alors $\displaystyle\int_a^1 (1-u)^n\,u^{x-1}\,\mathrm{d}u = -\frac{a^x}{x}(1-a)^n + \frac{n}{x}\int_a^1 (1-u)^{n-1}\,u^x\,\mathrm{d}u \underset{a\to 0}{\longrightarrow} \frac{n}{x}\int_0^1 (1-u)^{n-1}\,u^x\,\mathrm{d}u$ car $\displaystyle\lim_{a\to 0^+} a^x = 0$.
Ainsi $\boxed{I_n(x) = \dfrac{n}{x}\,I_{n-1}(x+1).}$

b. Pour $y>0$, $I_0(y) = \displaystyle\int_0^1 u^{y-1}\,\mathrm{d}u = \Big[\frac{u^y}{y}\Big]_{u=0}^{u=1} = \frac{1}{y}.$ et $I_n(x) = \dfrac{n}{x}\times\dfrac{n-1}{x+1}\times\cdots\times I_0(x+n) = \boxed{\dfrac{n!}{x\,(x+1)\ldots(x+n)}.}$

c. $\forall\, x>0,\ \Gamma(x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^n \Big(1-\frac{t}{n}\Big)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t \overset{t=nu}{=} \lim_{n\to\infty}\int_0^1 (1-u)^n\,(nu)^{x-1}\,n\,\mathrm{d}u = \lim_{n\to\infty} n^x\,I_n(x) = \boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^x}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x+k)}.}$

12. *Application* :

a. Si $x \in]0,1[$, alors $1-x \in]0,1[$, donc $\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2\,n^x\,n^{1-x}}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x+k)\,(1-x+k)}.$

Or $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x+k)\,(1-x+k) = \prod_{k=0}^{n}(x+k)\prod_{k=1}^{n+1}(k-x) = x\,(n+1-x)\prod_{k=1}^{n}(k^2-x^2) = x\,(n+1-x)\,(n!)^2\prod_{k=1}^{n}\Big(1-\frac{x^2}{k^2}\Big),$

Ainsi (puisque Γ, vu son écriture intégrale, est strictement positive sur $]0,+\infty[$) on peut écrire :

$$\frac{1}{\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1-x}{n}\,x\prod_{k=1}^{n}\Big(1-\frac{x^2}{k^2}\Big) = \boxed{x\prod_{n=1}^{+\infty}\Big(1-\frac{x^2}{n^2}\Big)}$$

b. En prenant $t = \pi x$ dans l'égalité : $\sin t = t\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\Big(1-\frac{t^2}{n^2\pi^2}\Big)$ obtenue au **7.**c pour $t \in]0,\pi[$, on trouve que :

pour $x \in]0,1[$, $\sin(\pi x) = \pi x\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\Big(1-\frac{x^2}{n^2}\Big).$

Donc la formule des compléments est : $\boxed{\forall\, x \in]0,1[,\ \dfrac{1}{\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)} = \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi}.}$

c. Pour $x = \dfrac{1}{2}$, on obtient : $\dfrac{1}{\big(\Gamma(1/2)\big)^2} = \dfrac{1}{\pi}$, donc $\boxed{\Gamma\big(\tfrac{1}{2}\big) = \sqrt{\pi}.}$

Donc $\sqrt{\pi} = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \overset{u=\sqrt{t}}{=} 2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$, d'où $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$ (intégrale de Gauss)

13. Ici $u_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{n}$.

a. $u_n = \ln n - \ln(n-1) - \dfrac{1}{n} = -\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n} = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge. On peut aussi invoquer le théorème sur le lien série intégrale pour la fonction décroissante $t \mapsto 1/t$.

b. La suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est de même nature que série $\displaystyle\sum_{n\geq 2}(v_n - v_{n-1})$ qui est convergente.

En effet : $v_n - v_{n-1} = \dfrac{1}{n} - \ln n + \ln(n-1) = -u_n$.

14. On a vu au **11.**c que $\forall\, x > 0,\ \dfrac{1}{\Gamma(x)} = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$ avec $\varphi_n(x) = \dfrac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x+k)}{n!\, n^x}$.

Or $\varphi_n(x) = \dfrac{x}{n^x}\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right) = x\,\mathrm{e}^{-x\ln n}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right) = x\,\mathrm{e}^{v_n x}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)\mathrm{e}^{\frac{-x}{k}}$.

en subsituant dans l'exp., $-\ln(n) = v_n - \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

Par convergence vers γ de la suite $(v_n)_n$, la continuité de l'exponentielle et la convergence du produit infini du **4.**c :

$$\boxed{\forall\, x > 0,\ \frac{1}{\Gamma(x)} = x\,\mathrm{e}^{\gamma x}\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{\frac{-x}{k}}.}$$

15. *Application*

a. $\forall\, x > 0$ on sait que $\Gamma(x) > 0$ donc par le 14.

$$\ln\big(\Gamma(x)\big) = -\ln x - \gamma\, x - \ln\left(\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)\mathrm{e}^{\frac{-x}{n}}\right) = -\ln x - \gamma\, x - \sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)\mathrm{e}^{\frac{-x}{n}}\right)$$

en utilisant l'égalité (II) obtenue au **3.**a.

Donc $\ln\big(\Gamma(x)\big) = -\ln x - \gamma\, x + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} w_n(x)$ avec $w_n(x) = \dfrac{x}{n} - \ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$ (III).

. Chaque w_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$.
. la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} w_n$ converge simplement sur $]0,1]$ par (III).
. Montrons que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} w_n'$ converge uniformément sur $]0,1]$.

En effet $\forall\, x \in]0,1],\ 0 \leq w_n'(x) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x} = \dfrac{x}{n\,(n+x)} \leq \dfrac{1}{n^2}$, d'où la convergence normale de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} w_n'$ sur $]0,1]$.

D'après le théorème de dérivation des séries de fonctions, on peut dériver terme à terme dans (III) et on obtient :

$$\boxed{\forall\, x \in]0,1],\ \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{n\,(n+x)}.}$$

b. On a vu que $\Gamma'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\ln(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,t^{x-1}\,\mathrm{d}t$. L'intégrale demandée est donc égale à $\Gamma'(1)$.

Or $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\,(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1$. Donc $\dfrac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -1 - \gamma + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\,(n+1)} = -\gamma$.

Ainsi $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\,\ln(t)\,\mathrm{d}t = -\gamma.}$

Fin du corrigé