$\boxed{\text{DM 11 CCP MP 2005, solution}}$

PROBLÈME

I GÉNÉRALITÉS

1.a. **Exemple 1 :** considérons pour tout $n \geq 1$, $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ et $a_0 = 0$.
On sait alors que $\sum a_n$ converge par théorème des séries alternées car $(1/n)$ tend en décroissant vers 0 donc $(\mathcal{P}_1)$ est vérifiée.
En outre pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n} = \ln(1+x)$ par le cours et on sait que $\ln(1+x) \underset{x\to1}{\longrightarrow} \ln(2)$ donc $(\mathcal{P}_2)$ est vérifiée.
N.B. Le raisonnement que nous avons fait ne prouve pas à ce stade car les deux limites coïncident.

Exemple 2 : avec $a_n = 1/n^2$. La propriété $(\mathcal{P}_1)$ est connue par le cours (série de Riemann) de somme $\zeta(2)$.
Pour $\mathcal{P}_2$: pour $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n/n^2$ on a CVN sur $[-1,1]$, et le théorème de sommation des limites donc s'applique pour dire que $f(x) \underset{x\to1}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^2$ (cf. 2) ci-dessous pour le résultat général).

1.b. Il suffit de considérer $(a_n) = (-1)^n$.
La série $\sum(-1)^n$ est grossièrement divergente, donc $(\mathcal{P}_1)$ est fausse.
En revanche $\dfrac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n = \dfrac{1}{1+x} \underset{x\to1}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$ donc $(\mathcal{P}_2)$ est vraie.

1.c. Il suffit de considérer $a_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
De même $\sum a_n$ est grossièrement divergente et $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \underset{x\to1^-}{\longrightarrow} +\infty$.

1.d.

$\boxed{\text{Penser que le caractère borné se conserve par CVU}}$

On sait que si une suite de fonctions (f_n) bornées sur un ensemble A converge uniformément sur A vers une fonction f, alors f est bornée sur A. En effet par I.T. en fixant un n tel que $\|f - f_n\|_\infty$ soit bien définie, ce qui est assuré APCR par déf. de la CVU, alors $\|f\|_\infty \leq \|f - f_n\|_\infty + \|f_n\|_\infty$.
Donc si par exemple on prend $A =]-1,1[$, et $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$, on sait que chaque fonction f_n est bornée sur $]-1,1[$ (car polynomiale sur $[-1,1]$ donc continue donc bornée sur le segment). Donc si (f_n) convergeait uniformément sur $]-1,1[$ sa limite

(qui est la limite simple car CVU ⇒ CVS) serait aussi bornée. Or $f\ :\ x\ \mapsto 1/(1-x)$ n'est pas bornée sur $]-1,1[[$.

2. On note $u_n(x) = a_n x^n$. On sait que $\sup_{x\in[0,1]}|u_n(x)| = |a_n|$.
L'hyp. $\sum a_n$ CVA donne donc que la série de fonction $\sum u_n$ converge *normalement* (CVN) sur $[0,1]$, en particulier uniformément (1).
D'autre part pour chaque $n\in\mathbb{N}$, $u_n(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} a_n$ (2).
Avec (1) et (2) et le théorème de sommation de limites, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x\to 1}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

3. Par D.E.S. on peut écrire : $\dfrac{1}{n(n-1)} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$.
Pour $x\in]-1,1[$, comme les trois séries qu'on va considérer convergent, par somme de limites, on peut écrire ;

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{n} = x\ln(1+x) + [\ln(1+x) - x]$$

Pour $x\in]-1,1[$, par D.E.S. on peut écrire :

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{n} = x\ln(1+x) + [\ln(1+x) - x] \quad (1)$$

D'autre part pour $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n(n-1)}$, $|a_n| \sim \dfrac{1}{n^2}$ est T.G.S.C. (terme général de série convergente).
Donc la question précédente s'applique $f(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}$
ce qui, avec (1) donne : $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)} = 2\ln 2 - 1$.

II THÉORÈME D'ABEL

4.a. Comme $r_{n+p-1} - r_{n+p} = a_{n+p}$, on a tout simplement : $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}(r_{n+p-1} - r_{n+p})\,x^{n+p} = R_n(x)$

4.b.
La transformation demandée, (transformation d'Abel) est une I.P.P. discrète.
En effet le a) a consisté à voir chaque a_{n+p} comme la dérivée discrète $r_{n+p-1} - r_{n+p}$, on va maintenant obtenir une formule où l'on va « primitiver a_n en r_n et dériver x^n en $x^n - x^{n-1}$, simplement en réindexant dans la somme. Bien sûr, on considère d'abord des sommes finies

$$\begin{aligned} R_{n,k}(x) &:= \sum_{p=1}^{k} (r_{n+p-1} - r_{n+p}) x^{n+p} \\ &= \sum_{p=1}^{k} r_{n+p-1} x^{n+p} - \sum_{p=1}^{k} r_{n+p} x^{n+p} \\ &= r_n\, x^{n+1} + \sum_{p=1}^{k-1} r_{n+p} (x^{n+p+1} - x^{n+p}) - r_{n+k}\, x^{n+k} \quad (*) \end{aligned}$$

après mise à l'écart du premier terme de la première somme, du dernier de la second somme et réindexation des autres.
Pour $x \in [0,1]$ fixé, dans $(*)$ le dernier terme $-r_{n+k}\, x^{n+k}$ tend vers 0 quand $k \to +\infty$ puisque $r_{n+k} \to 0$ comme reste d'une série convergente. On peut donc passer à la limite pour $k \to +\infty$ dans $(*)$ et obtenir, comme demandé :

$$R_n(x) = r_n x^{n+1} + \sum_{p=1}^{+\infty} r_{n+p} (x^{n+p+1} - x^{n+p}) = r_n x^{n+1} + x^{n+1}(1-x) \sum_{p=1}^{+\infty} r_{n+p} x^{p-1}$$

pour tout $x \in [0,1]$.

4.c. Comme on l'a déjà signalé, r_n tend vers 0 ; par conséquent, si l'on se donne $\varepsilon > 0$, on dispose d'un entier n_0 pour tout $k \geqslant n_0$ on ait $|r_k| \leqslant \varepsilon/2$; alors on a bien $|r_{n+p}| \leqslant \varepsilon/2$ pour $n \geqslant n_0$ et p entier naturel.
Et pour $x \in [0,1[$ et $n \geqslant n_0$ on obtient par I.T. dans l'égalité du b) : $|R_n(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}(1-x) \sum_{p=1}^{+\infty} x^{p-1} = \varepsilon$.
Pour $x = 1$ le second terme $(1-x)$ est nul et on a encore la majoration $|R_n(x) \leq \varepsilon/2 \leq \varepsilon$.

4.d. Pour $u_n(x) = a_n x^n$, la question 4.c prouve convergence uniforme de la série de fonctions $\sum u_n$ sur $[0,1]$. Comme les fonction u_n sont continues sur $[0,1]$ cette convergence uniforme prouve la continuité de la somme sur $[0,1]$ ce qui en 1 donne la limite demandée : $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) \overset{def}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

5. Par l'absurde si $\sum a_n$ convergeait, le théorème d'Abel du 4 montrerait que $f(x)$ a une limite finie pour $x \to 1$. *Contradiction* avec l'hypothèse de l'énoncé. Donc $\sum a_n$ diverge.

6. Pour tout $x \in]-1,1[$ par primitivation du développement de $\dfrac{1}{1+x^2}$ on obtient $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$, et l'on peut [1] appliquer le théorème d'Abel pour obtenir : $\dfrac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

1. Ce résultat s'obtient aussi par majoration du reste d'une série alternée vérifiant le critère spécial ...

7.a La série proposée converge par critère spécial des séries alternées car $|v_n|$ tend vers 0 en décroissant.

Le terme général du produit de Cauchy est ici : $w_n = \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{(-1)^n}{\big(k(n-k)\big)^{1/4}} = (-1)^n a_n$.

(poser $u_0 = v_0 = 0$)

Or pour $k \in [\![0,n]\!]$, $k(n-k) \leqslant n^2$ et par conséquent $a_n \geqslant \dfrac{n-1}{\sqrt{n}}$; ce qui montre que la série de terme général w_n diverge grossièrement.

7.b Puisque $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, les séries entières $\sum u_n x^n$ et $\sum v_n x^n$ ont un rayon de convergence au moins égal à 1. D'après le cours, c'est alors aussi le cas de $\sum w_n x^n$... Si l'on note $U(x)$, $V(x)$, $W(x)$, les sommes respectives, on a : $U(x)V(x) = W(x)$ pour tout $x \in [0,1[$. Mais d'après le théorème d'Abel [2] appliqué à chacune des trois séries, lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures, $U(x)$ tend vers $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, $V(x)$ tend vers $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$, $W(x)$ tend vers $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n$. Par unicité de la limite, le produit des deux premières sommes est égale à la troisième.

III RÉCIPROQUE DU THÉORÈME D'ABEL

Tous les théorèmes donnant une récip. d'Abel s'appellent *théorèmes Taubériens*

8. C'est la question 1.b) !

9. Puisque les coefficients a_n sont positifs, on sait que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in [0,1[, \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k \leqslant f(x) \quad (1)$$

En outre, la fonction f est croissante sur $[0,1[$, donc

$$\forall\, x \in [0,1[,\ f(x) \leqslant \lim_{1^-} f := \ell \quad (2)$$

On a donc avec (1) et (2) :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in\ [0,1[,\ \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k \leqslant \ell \quad (3)$$

Pour n fixé, en faisant tendre x vers 1 dans (3), on obtient :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} a_n \leq \ell \quad (4)$$

L'inégalité (4) est une majoration de la suite des sommes partielles de la série à termes positifs $\sum a_n$ qui converge donc.

IV SÉRIES HARMONIQUES TRANSFORMÉES

2. Bien entendu, cela devient trivial si les deux rayons initiaux sont strictement supérieurs à 1 . . .

10. D'après le lemme d'Abel du programme, s'il existe $r > 0$ tel que la suite de terme général $|a_n| r^n$ soit bornée, alors le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est supérieur ou égal à r.
Comme la suite (ε_n) est bornée, avec $r = 1$ on voit ainsi que les deux séries considérées ont un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. Au point 1, la première diverge grossièrement et la deuxième ne converge pas absolument ; par conséquent les deux suites ont pour rayon de convergence 1.

11. Par théorème d'intégration terme à terme pour les séries entières, pour chaque $x \in]-1, 1[$,

$$\int_0^x g(t)dt = \int_0^x (\sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n t^{n-1} dt) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n \int_0^x t^{n-1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n} x^n = f(x)$$

Par théorème d'Abel de la Q4, si $f(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$, alors $\sum \frac{\varepsilon_n}{n}$ converge.
Réciproquement comme ici $a_n = \frac{\varepsilon_n}{n} = O(\frac{1}{n})$ avec le théorème de (Tauber)-Littlewood admis, on peut affirmer que la convergence de $\sum a_n$ entraine que $f(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$.

12. Avec p la période de la suite (ε_n), on a, pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$x^p\, g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n\, x^{n+p-1} = \sum_{k=p+1}^{+\infty} \varepsilon_{k-p}\, x^{k-1} \overset{(*)}{=} \sum_{k=p+1}^{+\infty} \varepsilon_k\, x^{k-1} = g(x) - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2\, x + \cdots \varepsilon_p\, x^{p-1})$$

l'égalité $(*)$ venant de la p-périodicité de (ε_n).
Par conséquent, $\forall\, x \in]-1, 1[,\ g(x) = \dfrac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2\, x + \cdots \varepsilon_p\, x^{p-1}}{1 - x^p}$.

13.On peut chasser le lapin au bazooka (pauvre lapin) : (i) Pour la série harmonique, on considère $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n = 1$, la suite (ε_n) est donc périodique de période $p = 1$.
Avec la Q12, on en déduit qu'ici $g(x) = \frac{1}{1-x}$. Avec la question 11, on sait que $\sum \frac{1}{n}$ converge ssi $x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{1-t}$ admet une limite finie quand $x \to 1$.
Or $\int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} +\infty$ ce qui montre bien que $\sum \frac{1}{n}$ diverge.
(ii) Pour la série harmonique alternée, on considère $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\varepsilon_n = (-1)^n$, la suite (ε_n) est donc périodique de période 2.
Avec la Q12, on a alors $g(x) = \frac{-1+x}{1-x^2} = -\frac{1}{1+x}$.
Avec la Q11, on sait que $\sum (-1)^n/n$ converge ssi $x \mapsto -\int_0^x \frac{dt}{1+t}$ admet une limite finie quand $x \to 1$.
Or $-\int_0^x \frac{dt}{1+t} = -\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\ln(2)$. Donc $\sum (-1)^n/n$ converge et mieux $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \lim_{x\to 1} f(x) = -\ln(2)$.

14. En fait la chasse au lapin de la Q13 était pour préparer le terrain à cette question

D'après Q11 et Q12, on sait que $\sum \frac{\varepsilon_n}{n}$ converge si, et seulement si, $x \mapsto \int_0^x g$ admet une limite en 1 avec $g(x) = \dfrac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 x + \cdots + \varepsilon_p x^{p-1}}{1 - x^p}$.

Or $(1 - x^p) = (1 - x)(1 + x + \cdots + x^{p-1}) \underset{x \to 1}{\sim} p(1 - x)$.

En notant $\operatorname{num}(x) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 x + \cdots + \varepsilon_p x^{p-1}$ on distingue deux cas :

• 1er cas : $\operatorname{num}(1) \neq 0$ dans ce cas $g(x) \underset{x \to 1}{\sim} \dfrac{num(1)}{p(1-x)}$ qui n'est pas intégrable au voisinage de 1 donc par théorème de comparaison (à une fonction de signe constant), on en déduit que g n'est pas intégrable au voisinage de 1 et donc que $\sum \frac{\varepsilon_n}{n}$ diverge.

• 2ème cas : $\operatorname{num}(1) = 0$. Comme num est un polynôme il se factorise par $(x - 1)$ et $\operatorname{num}(x) = (1 - x)q(x)$ avec q polynôme. Dans ce cas $g(x) = \dfrac{q(x)}{p}$ se prolonge par continuité en 1 et est donc intégrable au voisinage de 1. Dans ce cas $\sum \frac{\varepsilon_n}{n}$ converge.

Avec les deux cas et en remarquant que $\operatorname{num}(1) = \sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i$, on a montré que :

$$\boxed{\sum \frac{\varepsilon_n}{n} \text{ converge si, et seulement si } \sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i = 0}$$

15. On a ici : $g(x) = \dfrac{1 + x + x^2 - x^3 - x^4 - x^5}{1 - x^6} = \dfrac{(1 + x + x^2)(1 - x^3)}{(1 - x^3)(1 + x^3)} = \dfrac{1 + x}{1 + x^3} + \dfrac{x^2}{1 + x^3}$;

on en déduit que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - x + 1} + \int_0^1 \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{1 + x^3}$. La première intégrale (abélienne) vaut : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + 3/4} = 2\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + 3/4} = \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

Pour la seconde, on a une primitive évidente ... Le résultat final est donc : $\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}} + \dfrac{\ln 2}{3}$.

Appendice (pas traité par vous snif ! !)

Deux ingrédients :

• Majoration de $|1 - x^n|$ par $n|1 - x|$ qui fait comprendre d'où vient le na_n

• Cesaro appliqué à la somme $1/N \sum_{n=0}^{N} na_n$.

a) On sait que $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n - f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

En regroupant la partie commune aux deux sommes :
$\sum_{n=0}^{N} a_n - f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n(1-x^n) - \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n.$
Ainsi :
$\left|\sum_{n=0}^{N} a_n - f(x)\right| \leq \sum_{n=0}^{N} |1-x^n||a_n| + \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n|x^n \quad (1).$
Or par factorisation $|(1-x^n)| = |(1-x)(1+x+\cdots+x^{n-1})| \leq n|1-x| \quad (2)$ car pour tout k, $|x|^k \leq 1$.
Avec (1) et (2) on a bien l'inégalité demandée.

> L'intérêt de ce qui précède est déjà de faire apparaître les na_n qui tendent vers zéro, dans la première somme. On va maintenant le faire apparaître dans la seconde

b) Pour faire apparaître le majorant de l'énoncé, on réécrit donc $\sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n|x^n = \sum_{n=N+1}^{+\infty} n|a_n|\frac{x^n}{n}$.
Puis on majore simplement tous les $n|a_n|$ de la somme par le s_N de l'énoncé, et on obtient :
$\sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n|x^n \leq s_N \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \leq \frac{s_N}{N} \sum_{n=N+1}^{+\infty} x^n = \frac{s_N}{N} \cdot \frac{x^{N+1}}{1-x} \leq \frac{s_N}{N} \cdot \frac{1}{1-x}.$
En introduisant cette majoration dans le résultat du a), on a bien l'inégalité demandée au b).
c) En appliquant l'inégalité du b) à $x = 1 - \frac{1}{N}$, on obtient :

$$\left|\sum_{n=0}^{N} a_n - f(1-\frac{1}{N})\right| \leq \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} n|a_n| + s_N$$

Or par théorème de Cesaro, comme $na_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on sait que $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} n|a_n| \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad (*)$.
D'autre part $S_N = \sup_{n\geq N} n|a_n| \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ puisque $na_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi la majoration $(*)$ donne que $\left|\sum_{n=0}^{N} a_n - f(1-\frac{1}{N})\right| \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Comme on sait que $f(x) \underset{x\to1}{\longrightarrow} \ell$, en part. $f(1-\frac{1}{N}) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et donc $\sum_{n=0}^{N} a_n \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. □