

**Banque CCINP :** Ex. 29,30.

### Continuité, dérivabilité

**Exercice 1** (La continuité d'une intégrale à paramètre, application au calcul). a) Montrer que  $F : y \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+ixy)}$  est continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ .  
b) Expliciter  $F(y)$  pour tout  $y \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 2** (L'intégrale de la Gaussienne, comme valeur particulière d'une intégrale à paramètre). On note  $G = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$ .

On considère la fonction  $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$ .

a) Préciser l'ensemble de déf. de  $F$ , puis montrer qu'elle vérifie (sur un ensemble à préciser) une E.D. dont le second membre fait intervenir  $G$ .

b) Résoudre cette E.D. et retrouver ainsi la valeur de  $G$ .

c) **Bonus :** A l'aide d'une expression trouvée pour  $g$  grâce à l'E.D. obtenir un D.A. à deux termes significatifs de  $g(x)$  quand  $x \rightarrow +\infty$ .

**Exercice 3** (Calcul incontournable de la transformée de Fourier de la gaussienne). Soit  $g : t \mapsto e^{-t^2/2}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-itx} dt$ .

Calculer  $h$  en trouvant une E.D. vérifiée par  $h$ .

**Exercice 4** (Famille d'Intégrales « de Fresnel » Semi-CV, une I.P.P. suffit, pour l'existence comme pour la continuité). Si  $x > 1$ , on pose  $f(x) = \int_1^{+\infty} e^{itx} dt$ .

a) Montrer que  $f$  est bien définie.

b) Montrer que  $f$  est continue.

### Etude asymptotique d'intégrales à paramètres

**Exercice 5** (Lemme de Riemann-Lebesgue). a) Version «  $\mathcal{C}^1$  sur un segment » :

Soit  $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{K})$ . Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on note  $R_\lambda = \int_a^b f(t)e^{i\lambda t} dt$ .

Montrer que  $R_\lambda \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$ .

b) Rappel : si  $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ , on définit ses *coefficients de Fourier* (réels) par  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt$  et  $b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt$  et ses coefficients de Fourier complexes comme les  $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int} dt$ .  
Que dit le résultat du a) sur les coefficients de Fourier de  $f$  si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  ?

c) Version «  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  » : Montrer que la transformée de Fourier d'une fonction  $\mathcal{C}^1$  intégrable sur  $\mathbb{R}$  tend vers zéro en  $\pm\infty$  autrement dit que si  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{K})$  est *intégrable* sur  $\mathbb{R}$  alors  $\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-itx} dt$  vérifie  $\hat{f}(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$ .

**N.B.** On peut montrer que les résultats précédents sont vrais sans l'hyp.  $\mathcal{C}^1$  mais seulement c.p.m. cf T4.

**Exercice 6** (Transformée de Laplace : théorème de la valeur initiale de  $f$  vue quand  $x \rightarrow +\infty$  dans  $L(f)(x)$ ). Soit  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$  continue par morceau, on suppose qu'il existe un  $x_0 \in \mathbb{R}$  tel que la fonction  $t \mapsto e^{-x_0 t} f(t)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ .

On définit alors  $\forall x \geq x_0$ , la transformée de Laplace de  $f$  par :

$$L(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt.$$

a) Montrer que

(i) La fonction  $L(f)$  est continue sur  $[x_0, +\infty[$ ,

(ii)  $L(f)(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .

b) Montrer ici la propriété suivante : si on suppose  $f$  continue en 0, alors  $L(f)(x) = \frac{f(0)}{x} + o_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$ .

**Indication** – Ce théorème du b) est difficile sans indication. On pourra se contenter de le faire dans le cas où  $f$  est *bornée* sur  $\mathbb{R}^+$  et dans ce cas ce n'est pas bien difficile. Pour les plus motivés, pour le cas général, on pourra d'abord se ramener au cas où  $x_0 = 0$  i.e.  $f$  intégrable, et utiliser le fait que  $f$  est bornée au voisinage de 0.

**Exercice 7 (Petit problème : Formule d'inversion de Fourier dans l'espace de Schwartz).**

**Définition 1 :** Une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  est dite à décroissance rapide ssi pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x^n f(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} 0$ .

**Définition 2 :** si  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , on note  $\widehat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-ixt} dt$ , la transformée de Fourier de  $f$ .

a) Montrer que si  $f$  C.P.M. est à décroissance rapide, alors  $\widehat{f}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

**Définition 3 (l'espace de Schwartz) :** Soit  $\mathcal{S}$  l'ensemble des fonctions  $f$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  dont toutes les dérivées  $f^{(k)}$  pour  $k \in \mathbb{N}$  sont à décroissance rapide.

b) Soit  $f \in \mathcal{S}$ . Donner une relation entre  $\widehat{f'}$  et  $\widehat{f}$ .

c) En déduire que si  $f \in \mathcal{S}$  alors  $\widehat{f} \in \mathcal{S}$  et que  $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}, f \mapsto \widehat{f}$  est une application linéaire.

d) Pour  $g : x \mapsto e^{-x^2/2}$  montrer que  $\widehat{g} = g$ .

e) **Excursion : théorème de division**

(i) Soit  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telle que  $f(0) = 0$ . Montrer qu'il existe  $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x.g(x).$$

*Indication :* on pensera à écrire  $f(x) = \int_0^x f'(t) dt$  et on essaiera d'en déduire une écriture sympathique de  $g(x) = \frac{1}{x} f(x)$ .

(ii) Généralisation :

Soit  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telle que  $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(r-1)}(0) = 0$ . Montrer qu'il existe  $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^r g(x).$$

Autrement dit  $f$  est divisible par  $x \mapsto x^r$  dans l'anneau  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

f) **Retour à l'espace de Schwartz :**

(i) Montrer que si  $f \in \mathcal{S}$  et  $f(0) = 0$  alors  $q : x \neq 0 \mapsto f(x)/x$  se prolonge en une fonction  $\mathcal{C}^\infty$ , qui est dans  $\mathcal{S}$ .

(ii) A l'aide de la fonction  $q$  du (i), montrer que si  $f \in \mathcal{S}$  et  $f(0) = 0$  alors  $\int_{\mathbb{R}} \widehat{f} = 0$ .

g) A l'aide du d) et du f), montrer que si  $f \in \mathcal{S}$  alors  $\widehat{\widehat{f}}(0) = f(0)$ .

h) **Transformée de Fourier d'une translatée de  $f$  :** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ , soit  $f \in \mathcal{S}$ . On note  $\tau_\alpha(f) : t \mapsto f(\alpha + t)$ .

Exprimer  $\widehat{\tau_\alpha f}$  en fonction de  $\widehat{f}$ .

i) **La formule d'inversion de Fourier :** En déduire que pour tout  $f \in \mathcal{S}$ , tout  $x \in \mathbb{R}$   $\widehat{\widehat{f}}(x) = f(-x)$  et donc que :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S} &\rightarrow \mathcal{S} \\ f &\mapsto (x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{+itx} dt) \end{aligned}$$