Banque CCINP : Ex. 34, 35, 36. 41,44, 45.

Ouverts, fermés

Exercice 1.
a) Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble non vide *fermé, majoré*. Montrer que A admet un maximum.
b) Exemple d'application : soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Montrer que si $Z(f) = \{x \in [a,b],\ f(x) = 0\}$ est non vide, alors $Z(f)$ admet un plus grand et un plus petit élément.

Exercice 2 (Quasi QdC)**.** Soient A et B deux parties d'un e.v.n. E.
a) Quelle relation y-a-t-il entre $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$? (Inclusion, égalité, contre-exemples pour une inclusion ?)
b) Même question pour $Int(A \cup B)$ et $Int(A) \cup Int(B)$.
c) Quelles relations entre $Int(E \setminus A)$, $\overline{E \setminus A}$, $E \setminus \overline{A}$, $E \setminus Int(A)$?

Exercice 3 (Sous-groupes de $(\mathbb{R},+)$: (*dém. centrale-Mines, mais il est bon de connaître le résultat pour des applications comme le 3)*)**.** Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ tel que $G \neq \{0\}$. Soit $\alpha = \inf G \cap \mathbb{R}^{+*}$.
1) On suppose ici que $\alpha > 0$.
a) Montrer que $\alpha \in G$.
b) Montrer qu'alors $G = \alpha\mathbb{Z}$.
c) En déduire que dans ce cas G est fermé dans $\mathbb{R}$.
2) On suppose que $\alpha = 0$. Montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.
Avec 1) et 2) on a démontré qu'un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ est donc ou bien de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ ou bien dense.
3) Une application : si a et b sont deux réels non nuls, montrer que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense ssi $a/b \notin \mathbb{Q}$.
Indication – On regardera l'équivalence des négations.

Exercice 4 (Somme de deux ouverts, de deux fermés)**.** Soit E un e.v.n. Pour deux parties A et B quelconques de E, on définit $A + B := \{a + b,\ (a,b)\ \in A \times B\}$.
a) Montrer que si A et B sont ouverts alors $A + B$ est ouvert.
b) Montrer que si A et B sont fermés alors $A + B$ n'est pas nécessairement fermé.

Continuité d'applications d'une variable vectorielle

Exercice 5. Soit $f\ :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, telle que $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.
a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
b) Montrer que f est continue au point $0 = (0,0)$.
Indication – On pourrait utiliser les coordonnées polaires $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$ dans lesquelle, $r = \|(x,y)\|_2$.

Exercice 6. Etudier la continuité en $(0,0)$ de la fonction f définie par $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}, \text{ si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$.

Topologie dans $M_n(\mathbb{K})$ et applications

Exercice 7. a) Justifier que det : $A \in M_n(\mathbb{K}) \mapsto \det(A) \in \mathbb{K}$ est *continue.*
b) Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est ouvert dans $M_n(\mathbb{K})$.
c) Montrer que l'application $GL_n(\mathbb{K}) \to GL_n(\mathbb{K})$, $A \mapsto A^{-1}$ est continue.

Exercice 8. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,
a) Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $M_n(\mathbb{K})$.
Indication – **(M1)** On pourra considérer pour approcher une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ les matrices de la forme $A + \frac{1}{k}I_n$.
(M2) Si A est de rang r, utiliser une forme réduite de A pour la relation d'équivalence, qu'on peut alors approcher facilement par des matrices inversibles.
b) Soit $\Delta = \{A \in M_n(\mathbb{K}), \det(A) = 0\}$. Déterminer l'adhérence et l'intérieur de Δ.

Exercice 9 (Application de l'exercice précédent)**.** a) Montrer que si A et B sont dans $M_n(\mathbb{K})$ et A est inversible, alors AB et BA sont semblables.
En déduire que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
b) En utilisant le fait que $GL_n(\mathbb{K})$ est *dense* dans $M_n(\mathbb{K})$ montrer que pour toutes matrices A, B dans $M_n(\mathbb{K})$, on a encore $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.