

Banque CCINP : Ex. 34, 35, 36. 41,44, 45.

Ouverts, fermés

Exercice 1.

- Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble non vide *fermé, majoré*. Montrer que A admet un maximum.
- Exemple d'application : soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. Montrer que si $Z(f) = \{x \in [a, b], f(x) = 0\}$ est non vide, alors $Z(f)$ admet un plus grand et un plus petit élément.

Exercice 2 (Quasi QdC). Soient A et B deux parties d'un e.v.n. E .

- Quelle relation y-a-t-il entre $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$? (Inclusion, égalité, contre-exemples pour une inclusion?)
- Même question pour $\text{Int}(A \cup B)$ et $\text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$.
- Quelles relations entre $\text{Int}(E \setminus A)$, $\overline{E \setminus A}$, $E \setminus \overline{A}$, $E \setminus \text{Int}(A)$?

Exercice 3 (Sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$: (dém. centrale-Mines, mais il est bon de connaître le résultat pour des applications comme le 3)). Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ tel que $G \neq \{0\}$. Soit $\alpha = \inf G \cap \mathbb{R}^{+*}$.

- On suppose ici que $\alpha > 0$.
 - Montrer que $\alpha \in G$.
 - Montrer qu'alors $G = \alpha\mathbb{Z}$.
 - En déduire que dans ce cas G est fermé dans $\mathbb{R}$.
- On suppose que $\alpha = 0$. Montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.

Avec 1) et 2) on a démontré qu'un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ est donc ou bien de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ ou bien dense.

- Une application : si a et b sont deux réels non nuls, montrer que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense ssi $a/b \notin \mathbb{Q}$.

Indication – On regardera l'équivalence des négations.

Exercice 4 (Somme de deux ouverts, de deux fermés). Soit E un e.v.n. Pour deux parties A et B quelconques de E , on définit $A + B := \{a + b, (a, b) \in A \times B\}$.

- Montrer que si A et B sont ouverts alors $A + B$ est ouvert.
- Montrer que si A et B sont fermés alors $A + B$ n'est pas nécessairement fermé.

Continuité d'applications d'une variable vectorielle

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, telle que $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

- Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
- Montrer que f est continue au point $0 = (0, 0)$.

Indication – On pourrait utiliser les coordonnées polaires $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ dans laquelle, $r = \|(x, y)\|_2$.

Exercice 6. Etudier la continuité en $(0, 0)$ de la fonction f définie par $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Topologie dans $M_n(\mathbb{K})$ et applications

Exercice 7. a) Justifier que $\det : A \in M_n(\mathbb{K}) \mapsto \det(A) \in \mathbb{K}$ est *continue*.

- Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est ouvert dans $M_n(\mathbb{K})$.
- Montrer que l'application $GL_n(\mathbb{K}) \rightarrow GL_n(\mathbb{K})$, $A \mapsto A^{-1}$ est continue.

Exercice 8. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,

- Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $M_n(\mathbb{K})$.

Indication – (M1) On pourra considérer pour approcher une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ les matrices de la forme $A + \frac{1}{k}I_n$.

(M2) Si A est de rang r , utiliser une forme réduite de A pour la relation d'équivalence, qu'on peut alors approcher facilement par des matrices inversibles.

- Soit $\Delta = \{A \in M_n(\mathbb{K}), \det(A) = 0\}$. Déterminer l'adhérence et l'intérieur de Δ .

Exercice 9 (Application de l'exercice précédent). a) Montrer que si A et B sont dans $M_n(\mathbb{K})$ et A est inversible, alors AB et BA sont semblables.

En déduire que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

b) En utilisant le fait que $GL_n(\mathbb{K})$ est *dense* dans $M_n(\mathbb{K})$ montrer que pour toutes matrices A, B dans $M_n(\mathbb{K})$, on a encore $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Exercice 10 (Densité dans $M_n(\mathbb{C})$). a) Rappeler une C.S très simple sur les entrées diagonales d'une matrice T.S $T \in M_n(\mathbb{K})$ pour que celle-ci soit diagonalisable.

b) Pour une matrice $M \in TS_n(\mathbb{K})$, construire une suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \in TS_n(\mathbb{K})$ de matrices déduites de M par une petite perturbation des entrées diagonales de sorte que $A_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} M$ (la perturbation tend vers zéro) et pour chaque $k \in \mathbb{N}$, A_k admet n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$.

c) En déduire que l'ensemble $\mathcal{D}_0$ des matrices de $M_n(\mathbb{C})$ ayant n valeurs propres distinctes est *dense* dans $M_n(\mathbb{C})$

d) En déduire que l'ensemble $\mathcal{D}$ des matrices diagonalisables dans $M_n(\mathbb{C})$ est *dense* dans $M_n(\mathbb{C})$

Exercice 11. a) Démontrer le théorème de Cayley-Hamilton pour les matrices dz.

b) A l'aide de l'exercice précédent, démontrer le théorème de Cayley-Hamilton pour toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$.

Applications linéaires, continues ou pas

Exercice 12. (i) Justifier que l'adhérence d'un s.e.v. de E est toujours un s.e.v. de E .

(ii) En déduire qu'un hyperplan d'un e.v.n. est toujours fermé ou dense (facile)

(iii) Montrer que le noyau d'une forme linéaire est fermé si, et seulement si, elle est continue

Indication pour le sens difficile : Si φ est une F.L. non continue, on a une suite (x_n) de la boule unité telle que $\varphi(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$. Se servir de φ pour montrer que $\ker \varphi$ est *dense*.

Exercice 13. a) Soit $E = \mathbb{R}[X]$ avec pour norme $\|P\| = \max_{k \in [0, n]} |a_k|$ pour $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. Et $D : E \rightarrow E$, $P \mapsto P'$. Justifier que D n'est pas continue.

b) On considère l'application $N_2 : E \rightarrow \mathbb{R}$, $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \mapsto \sum_{k=0}^n k! |a_k|$.

(i) Justifier que N_2 est une norme sur E .

(ii) Montrer que $D : (E, N_2) \rightarrow (E, N_2)$ est continue.

Exercice 14. Soit E, F, G trois e.v.n. de dim. finie. Montrer qu'une application bilinéaire B de $E \times F$ dans G vérifie qu'il existe une constante k telle que pour tout $(v, w) \in E \times F$, $\|B(v, w)\| \leq k \|v\| \cdot \|w\|$ et en déduire que B est continue.