

Solution du DM 5 : points extrémaux, ESSEC 2017

Partie 0 :

- 1) Soit $a \in A$. Soit $r = \min(d(a, 0), d(a, 1)) = \min(a, 1 - a)$, où $d(x, y) = |x - y|$ désigne la distance dans \mathbb{R} .
Alors $r > 0$ et si on prend $x = a - r/2$ et $y = a + r/2$ on a $x, y \in A$, $(x + y)/2 = a$ et $x \neq a$, $y \neq a$.
Donc a n'est pas extrémal .
- 2) Soit $a \in]0, 1[$ pour la même raison qu'au 1), a n'est pas extrémal dans $A = [0, 1]$.
Si on a $a = (x + y)/2$ avec $x \neq y$ alors quitte à échanger x et y , on a $x < a < y$.
Or si $a = 0$ dans $A = [0, 1]$ alors il n'existe pas de $x \in A$ tel que $x < 0$ donc 0 est extrémal .
De même si $a = 1$ alors il n'existe pas de $y \in A$ tel que $y > 1$ donc 1 est extrémal .

Partie 1 :

- 3) a)

Question triviale, donc il faut essayer de détailler un peu les justif.

Par déf. $M \in A_2 \Leftrightarrow \exists \alpha \in [0, 1], M = \begin{pmatrix} \alpha & 1 - \alpha \\ 1 - \alpha & \alpha \end{pmatrix}$

Or $\begin{pmatrix} \alpha & 1 - \alpha \\ 1 - \alpha & \alpha \end{pmatrix} = \alpha I + (1 - \alpha)J$ par déf. des lois d'e.v. dans $M_2(\mathbb{R})$.

Donc $M \in A_2 \Leftrightarrow \exists \alpha \in [0, 1], M = \alpha I + (1 - \alpha)J$ ce qui est la prop. demandée.

N.B. Cette description dit que $A_2 = [I, J]$, segment dans $M_2(\mathbb{R})$. Cette vision rend à peu près triviale les questions b) et 4) qui suivent.

b) Si l'on pense au a), A_2 est un segment, c'est l'enveloppe convexe de deux points, en particulier il est convexe ! Mais faisons semblant de ne rien comprendre pour répondre à la question.

Soit $\alpha, \beta \in [0, 1]$. Alors $\frac{M_\alpha + M_\beta}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2} I + \frac{(1 - \alpha) + (1 - \beta)}{2} J$.

Et comme $[0, 1]$ est convexe, $(\alpha + \beta)/2 \in [0, 1]$ (1) et $\frac{(1 - \alpha) + (1 - \beta)}{2} = 1 - \frac{\alpha + \beta}{2}$ (2) donc avec

(1) et (2), on a montré $\frac{M_\alpha + M_\beta}{2} = M_{\frac{\alpha + \beta}{2}} \in A_2$.

c) On peut se demander ce que cette question sur l'inversibilité vient faire là. En fait on retrouvera une généralisation de ce résultat au REF

(i) Par caractérisation par le déterminant : M_α est inversible dans $M_2(\mathbb{R})$ ssi son déterminant est non nul donc ssi $\alpha^2 - (1 - \alpha)^2 \neq 0$ ssi $2\alpha - 1 \neq 0$ ssi $\alpha \neq 1/2$.

Donc tous les éléments de $M_\alpha \in A_2$ sont inversibles dans $M_2(\mathbb{R})$ sauf $M_{1/2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(ii) Soit $\alpha \in [0, 1] \setminus \{1/2\}$. Par les formules de Cramer, on sait que $M_\alpha^{-1} = \frac{1}{2\alpha - 1} \begin{pmatrix} \alpha & \alpha - 1 \\ \alpha - 1 & \alpha \end{pmatrix}$.

Si on note $\beta = \frac{\alpha}{2\alpha - 1}$, on remarque que $M_\alpha^{-1} = M_\beta$ mais $M_\beta \in [I, J]$ ssi $\beta \in [0, 1]$.

- Or $\beta > 0$ ssi $2\alpha - 1 > 0$ ssi $\alpha > 1/2$. Donc si $\alpha \in]0, 1/2[$, $M_\beta \notin [I, J]$.

- Et avec la condition précédente, $\beta < 1$ ssi $\alpha < 2\alpha - 1$ ssi $\alpha > 1$. Donc c'est impossible pour $\alpha \in]0, 1/2[$.

Au total, les seuls M_α dont l'inverse est sur $A_2 = [I, J]$ sont $M_1 = I$ et $M_0 = J$ qui sont toutes les deux leur propre inverse.

Remarque : Il est remarquable que tous les éléments inversibles de la *droite affine* $(IJ) = \{\alpha I + (1 - \alpha)J, \alpha \in \mathbb{R}\}$ ait leurs inverses sur cette même droite. Ce résultat est plus fort que celui, mieux connu de nous, que leur inverse est dans le plan $\text{Vect}(I, J)$ car celui-ci est une sous-algèbre de $M_2(\mathbb{R})$.

4) On a démontré au 3) b) que pour tout α, β dans \mathbb{R} ,

$$\frac{M_\alpha + M_\beta}{2} = M_{\frac{\alpha+\beta}{2}} \quad (\dagger).$$

En outre $\alpha \mapsto M_\alpha$ est trivialement injective (regarder l'entrée $(1, 1)$ de M_α).

Cet égalité va permettre de tordre le coup des questions suivantes :

a) On sait que $I = M_1$. Donc $I = \frac{M_\alpha + M_\beta}{2}$ équivaut à $M_1 = M_{\frac{\alpha+\beta}{2}}$ et par injectivité $1 = \frac{\alpha + \beta}{2}$.

Mais on a vu au 1) que 1 est point extrémal de $[0, 1]$ donc $\alpha = \beta = 1$ et I est un point extrémal.

De même pour $J = M_0$ avec le même raisonnement.

b) Pour suivre docilement l'indication : d'après notre égalité (\dagger) ci-dessus $\frac{1}{2}(M_{2\alpha} + J) = \frac{1}{2}(M_{2\alpha} + M_0) = M_{\frac{2\alpha+0}{2}} = M_\alpha$ comme demandé.

Pour $\alpha \in]0, 1/2]$, $2\alpha \in]0, 1]$, donc l'égalité précédente montre que M_α est milieu d'un segment non trivial dans $A_2 = [J, I]$ donc, M_α n'est pas extrémal.

c) Si $\alpha \in [1/2, 1[$, alors toujours par (\dagger) , on a $M_\alpha = \frac{1}{2}(M_{2\alpha-1} + M_1)$ avec $2\alpha - 1 \in [0, 1]$.

Et $M_\alpha \neq M_1$, l'égalité précédente montre que M_α n'est pas extrémal.

N.B. Plus conceptuel. L'application $\alpha \mapsto M_\alpha$ est en fait une *bijection affine* entre $[0, 1]$ et A_2 et une telle bijection envoie point extrémaux sur points extrémaux, comme notre 3) le détaille.

5) a) Comme $J^2 = I$, on sait que J est annihilée par $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$ simplement scindé donc est dz.

En outre $J \neq I$ et $J \neq -I$ donc $X^2 - 1$ est le polynôme minimal de J , donc $\text{Sp}(J) = \{1, -1\}$.

Les s.e.v. propres associés sont donc tous les deux de dim. 1. Comme l'endomorphisme can. associé à J est $f : e_1 \mapsto e_2$ et $e_2 \mapsto e_1$, on voit immédiatement $e_1 + e_2$ est propre pour la v.p. 1 et $e_1 - e_2$ pour la v.p. -1.

b) On prend $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Par le a), on a $J = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$. On notera $D_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Comme $I = PIP^{-1}$, par combinaison linéaire des deux égalités :

$$\alpha I + (1 - \alpha)J = \alpha PIP^{-1} + (1 - \alpha)PD_0P^{-1} = P(\alpha I + (1 - \alpha)D_0)P^{-1}$$

On pose donc $D_\alpha = \alpha I + (1 - \alpha)D_0 = \text{diag}(\alpha, \alpha) + \text{diag}(1 - \alpha, \alpha - 1) = \text{diag}(1, 2\alpha - 1)$, on a bien :

$$\forall \alpha \in [0, 1], M_\alpha = PD_\alpha P^{-1} \quad \text{avec } D_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2\alpha - 1 \end{pmatrix}$$

c) (i) Vu le résultat du b), u_α est dz et admet comme v.p. 1 et $2\alpha - 1$.

Or une matrice dz est une matrice de projecteur ssi ses v.p. valent 0 ou 1.

Donc ici u_α est un projecteur ssi $2\alpha - 1 \in \{0, 1\}$ donc ssi $\alpha = 1$ ou $\alpha = 1/2$.

(ii) Pour $\alpha = 1$, $u_1 = \text{id}$ d'image \mathbb{R}^2 entier et de noyau $\{0\}$.

(iii) Pour $\alpha = 1/2$, on a $M_{1/2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Donc l'image de $u_{1/2}$ est la droite engendrée par $e_1 + e_2$ et son noyau celle engendrée par $e_1 - e_2$. Ce sont aussi bien sûr les s.e.v. propres communs à tous les u_α pour $\alpha < 1$, vu la diagonalisation commune du b).

Partie II :

6) **N.B.** La déf. de l'énoncé : « il existe un réel R positif tel que, pour tout vecteur $v \in A$, on ait $\|v\| \leq R$ », est la définition d'une *partie bornée* d'un e.v.n.

Par inégalité triangulaire, pour tout $(v, w) \in A^2$, $\|v - w\| \leq \|v\| + \|w\| \leq 2R$; donc l'ensemble considéré par l'énoncé est non vide (car $A \neq \emptyset$) et majoré par $2R$, donc par P.B.S. il admet un sup.

7) Cette question va montrer que si les points a et b réalisent un « diamètre » de A , en ce sens que $d(a, b) = \delta(A)$ alors a et b sont des points extrémaux.

a) (i) $\|a - b\| = \left\| \frac{c+d}{2} - b \right\| = \left\| \frac{c+d-2b}{2} \right\| = \left\| \frac{c-b}{2} + \frac{d-b}{2} \right\| \leq \frac{1}{2}(\|c-b\| + \|d-b\|)$ par I.T. et homogénéité de la norme.

En outre comme c et b sont dans A , $\|c-b\| \leq \delta(A)$ par déf. du diamètre. De même $\|d-b\| \leq \delta(A)$.

Ceci donne donc l'autre inégalité demandée : $\frac{1}{2}(\|c-b\| + \|d-b\|) \leq \frac{1}{2}(\delta(A) + \delta(A)) = \delta(A) = \|a-b\|$

(ii) Comme les deux extrémités de la chaîne d'inégalités sont égales, les deux inégalités intermédiaires sont des égalités.

Or si on avait $\|c-b\| < \|a-b\|$ ou $\|d-b\| < \|a-b\|$ alors l'inégalité somme de ces deux inégalités serait stricte, ce qui n'est pas.

Donc $\|c-b\| = \|a-b\|$ et $\|d-b\| = \|a-b\|$.

b) On sait que $\|c-b\|^2 = \|(c-a) + (a-b)\|^2$ et par bilinéarité du produit scalaire, $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v \rangle$.

Ceci donne la première égalité demandée : $\|c-b\|^2 = \|c-a\|^2 + \|a-b\|^2 + 2\langle c-a, a-b \rangle$ (1).

Enfin on a vu au a) que $\|c-b\|^2 = \delta(A)^2 = \|a-b\|^2$.

Donc (1) devient $\|a-b\|^2 = \|c-a\|^2 + \|a-b\|^2 + 2\langle c-a, a-b \rangle$ et en simplifiant on a bien $\|c-a\|^2 = -2\langle c-a, a-b \rangle$.

c) Les points c et d jouent des rôles interchangeables dans hyp. et conclusion de cette question.

d) Par différence des deux égalités obtenues au b) et c), on a :

$$\|c-a\|^2 - \|d-a\|^2 = -2\langle c-a, a-b \rangle + 2\langle d-a, a-b \rangle$$

Par linéarité du p.s. on obtient ;

$$\|c-a\|^2 - \|d-a\|^2 = 2\langle d-c, a-b \rangle \quad (\dagger)$$

Or comme $a = \frac{c+d}{2}$, (a est le milieu de $[c, d]$), $a-c = \frac{c+d}{2} - c = \frac{d-c}{2}$ et $d-a = d - \frac{c+d}{2} = \frac{d-c}{2}$.

Donc $a-c = d-a$ donc le premier membre de (\dagger) est nul et on a bien :

$$\langle d-c, a-b \rangle = 0$$

c'est-à-dire que $(d-c) \perp (a-b)$.

e) **Remarque : sans utiliser le d)** Par addition des deux égalités obtenues au b) et c) :

$$\begin{aligned} \|c-a\|^2 + \|d-a\|^2 &= 2\langle c-a, b-a \rangle + 2\langle d-a, b-a \rangle, \\ &= 2\langle c+d-2a, b-a \rangle \end{aligned}$$

Comme $c+d-2a = 2\left(\frac{c+d}{2} - a\right) = 0$, on conclut que $\|c-a\|^2 + \|d-a\|^2 = 0$ et donc que $c = a$ et $d = a$.

Partie III :

Remarques tous azimut :

- les matrices stochastiques sont comme leur nom l'indique, utiles en probabilité (chaîne de Markov) vous en avez rencontré au lycée et en sup.
- La notation A_n de l'énoncé nous dit que l'ensemble A_2 de la partie II était le cas particulier $n = 2$.

- Comme dans le cas $n = 2$, on gagne en compréhension à voir A_n comme une partie d'un ensemble qu'on notera ici :

$$\mathcal{F}_n = \{M \in M_n(\mathbb{R}), \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n m_{i,j} = 1, \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{i=1}^n m_{i,j} = 1, \}$$

Cet ensemble \mathcal{F}_n est un *sous-espace affine* de $M_n(\mathbb{R})$ de direction vectorielle $\overrightarrow{\mathcal{F}_n} = F_n$ de l'énoncé.

On peut se poser la question de la dim. de l'e.v F_n (et donc de l'espace affine \mathcal{F}_n), ce qui peut se voir assez vite mais sera traité au 13.

- Enfin, $A_n = \mathcal{F}_n \cap Q^+$ où $Q^+ = \{M \in M_n(\mathbb{R}), \forall i, j, m_{i,j} \geq 0\}$ est le « premier orthant » d'espace.

- 8) a) Dans la déf de A_n les deux indices i, j des entrées $m_{i,j}$ jouent des rôles symétriques donc $M \in A_n \Leftrightarrow {}^tM \in A_n$.

(Détournement d'avion) Par soucis de concision, on démontrera l'autre propriété demandée au a) après avoir prouvé le b) et c) (même si c'est direct à faire directement).

- b) Par déf. de X_0 et du produit de matrices, pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$,

$$MX_0 = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n m_{1,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n m_{n,j} \end{pmatrix}$$

Pour $M \in A_n$, on a donc ben $MX_0 = X_0$.

Remarque : comme ${}^tM \in A_n$, on a aussi ${}^tMX_0 = X_0$.

- c) Par le calcul du b), on a vu que $MX_0 = X_0$ équivaut à $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n m_{i,j} = 1$.

De même ${}^tMX_0 = X_0$ équivaut à $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{i=1}^n m_{i,j} = 1$.

Ainsi les deux conditions, $MX_0 = X_0$ et ${}^tMX_0 = X_0$ avec la positivité des $m_{i,j}$ sont équivalentes à $M \in A_n$.

- a) Le retour : on a M, M' dans A_n . On note $M'' = (M + M')/2$.

- Les entrées $m''_{i,j} = \frac{m_{i,j} + m'_{i,j}}{2}$ sont positives.
- On a $MX_0 = X_0$ et $M'X_0 = X_0$ donc $(M + M')/2 \cdot X_0 = MX_0/2 + M'X_0/2 = X_0$
- De même ${}^tMX_0 = X_0$ et ${}^tM'X_0 = X_0$ donne ${}^t(M + M')/2 X_0 = X_0$

On conclut bien, par c) que $(M + M')/2 \in A_n$.

- d) Stabilité par produit : on a M, M' dans A_n et on note $M'' = M.M'$.

- Par déf. du produit de matrices pour tout i, j , $m''_{i,j} = \sum_{k=1}^n m_{i,k}.m'_{k,j} \geq 0$.
- $M''X_0 = MM'X_0 = M.(M'X_0) = MX_0 = X_0$, en appliquant successivement la prop. de M' et de M .
- de même ${}^tMM'X_0 = {}^tM'.{}^tMX_0$ et on conclut de même.

Avec les trois propriétés précédentes, on conclut que $M.M' \in A_n$.

Ainsi A_n est stable par produit et contient I_n (ce serait vrai aussi de l'espace affine \mathcal{F}_n défini dans la remarque de début du III).

- 9) a) Si $\sigma = \text{id}$, $f_\sigma(e_i) = e_i$ pour tout i , et comme une appl. lin. est déterminée par l'image d'une base $f_\sigma = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$.

Ainsi $M_\sigma = I_n$.

On va en fait répondre à plusieurs questions de ce 9 qui sont un peu redondantes et posées dans un ordre pas très heureux à mon sens.

On va traiter le c) et le d) avant le b)

c) (i) Soit σ et σ' dans S_n . Pour chaque $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f_\sigma \circ f'_\sigma(e_i) = f_\sigma(e_{\sigma'(i)}) = f(e_{\sigma(\sigma'(i))})$.
Donc $f_\sigma \circ f'_\sigma$ et $f_{\sigma \circ \sigma'}$ coïncident sur une base de E , donc par linéarité :

$$\boxed{f_\sigma \circ f'_\sigma = f_{\sigma \circ \sigma'}}$$

(ii) Le (i) traduit matriciellement dit que $M_\sigma \times M_{\sigma'} = M_{\sigma \circ \sigma'}$.
Comme $f_{\text{id}} = \text{id}$, $M_{\text{id}} = I_n$ et donc $M_\sigma \times M_{\sigma^{-1}} = I_n$. Ainsi :

$$\boxed{M_\sigma \text{ est inversible d'inverse } M_{\sigma^{-1}}}$$

Remarque : Plus conceptuellement $\Phi : (S_n, \circ) \rightarrow (GL(E), \circ)$, $\sigma \mapsto f_\sigma$ est un *morphisme de groupes*. Un tel morphisme envoie toujours inverse sur inverse. Ici ce morphisme est injectif, et son image permet donc d'identifier (S_n, \circ) à un sous-groupe du groupe linéaire : le groupe des endomorphismes (resp. des matrices) de permutation.

Par ailleurs un morphisme d'un groupe (G, \cdot) dans le groupe linéaire d'un e.v. s'appelle une *représentation linéaire* du groupe (G, \cdot) . Ces représentations permettent souvent de mieux comprendre le groupe G .

d) Soit $\sigma \in S_n$. Alors f_σ envoie la base canonique (base orthonormée) sur la base des $(e_{\sigma(i)})$ (base permutée) encore orthonormée donc $f_\sigma \in O(E)$. Cela répond déjà au d) : $M_\sigma \in O_n(\mathbb{R})$.
b) Retour! (i) Comme $M_\sigma \in O_n(\mathbb{R})$, ${}^t M_\sigma = (M_\sigma)^{-1}$ et par c), $M_\sigma^{-1} = M_{\sigma^{-1}}$. Donc :

$$\boxed{{}^t M_\sigma = M_{\sigma^{-1}}}$$

(ii) Si M est de la forme M_σ alors :

- la colonne j de M est $E_{\sigma(j)}$ qui possède un 0 sur toutes les lignes, et un 1 à la ligne $\sigma(j)$.

En particulier pour chaque j , $\sum_{i=1}^n M_{i,j} = 1$ et aussi les entrées sont toutes positives (0 ou 1).

- On vient de voir que ${}^t M_\sigma$ est encore de la forme M_τ , donc on peut appliquer le résultat du
- précédent aux colonnes de ${}^t M$ pour conclure que $\sum_{j=1}^n M_{i,j} = 1$ pour toute ligne i de M .

Ainsi, on a bien, pour tout $\sigma \in S_n$, $M_\sigma \in A_n$.

e) \Rightarrow déjà montré au b) (ii) : si M est de la forme M_σ , on a bien montré qu'on n'avait dans chaque colonne qu'un 1 et des 0 et de même avec la transposée pour les lignes.

\Leftarrow : Soit M une matrice vérifiant la condition de l'énoncé. Soit C_1, \dots, C_n les colonnes de M . Chaque colonne C_j admet exactement une entrée non nulle, égale à 1 donc chaque C_j est de la forme $E_{\sigma(j)}$ avec $\sigma(j) \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

En outre pour $j_1 \neq j_2$, on doit avoir $\sigma(j_1) \neq \sigma(j_2)$ sinon la ligne d'indice $\sigma(j_1) = \sigma(j_2)$ de M aurait deux entrées non nulles.

Donc σ est injective, et $M = M_\sigma$ avec $\sigma \in S_n$. □

10) Notons $M = M_\sigma$. Soient A et B dans A_n telles que $M = \frac{A+B}{2}$.

On a donc pour tout i, j , $m_{i,j} = (a_{i,j} + b_{i,j})/2$ avec $a_{i,j} \in [0, 1]$, $b_{i,j} \geq [0, 1]$.

Si $m_{i,j} = 0$, on a donc $a_{i,j} = b_{i,j} = 0$ et si $m_{i,j} = 1$, on a $a_{i,j} = b_{i,j} = 1$ (cf. partie I : point extrémaux du segments $[0, 1]$).

Comme les entrées de M valent 0 ou 1, on conclut que pour tout i, j , $a_{i,j} = b_{i,j} = M$.

Donc $A = B = M$ et M est un point extrémal de A_n .

11) a) (i) Soit $\tau \in S_n$ et τ^{-1} son inverse dans S_n . Montrons que $\psi := \varphi_{\tau^{-1}}$ est la fonction réciproque de $\varphi := \varphi_\tau$.

Démonstration : pour chaque $\sigma \in S_n$, $\psi \circ \varphi(\sigma) = \tau^{-1} \circ \tau \circ \sigma = \sigma$ donc $\psi \circ \varphi = \text{id}$.

De même pour la composée $\varphi \circ \psi$.

Ainsi $\varphi := \varphi_\tau$ est bijective de S_n dans S_n .

(ii) Par déf. $f_\tau \circ p = f_\tau \circ \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f_\sigma$

Par linéarité $f_\tau \circ p = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f_\tau \circ f_\sigma = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f_{\tau \circ \sigma}$ (par 9 c)).

Comme on vient de montrer que $\sigma \mapsto \tau \circ \sigma$ est une bijection de S_n dans lui-même, par changement de variable $s = \tau \circ \sigma$, on obtient $f_\tau \circ p = \frac{1}{n!} \sum_{s \in S_n} f_s$ donc $\boxed{f_\tau \circ p = p}$.

b) Calculons $p \circ p = \frac{1}{n!} \sum_{\tau \in S_n} f_\tau \circ p$.

Par a), appliqué à chaque terme $f_\tau \circ p$ est égal à p et donc $p \circ p = \frac{1}{n!} \sum_{\tau \in S_n} p = \frac{1}{n!} (n! p = p)$

Comme p est linéaire et $p \circ p = p$, on conclut que p est un projecteur.

c) Comme p est un projecteur on sait que $\text{Im}(p) = \text{Fix}(p) := \{x \in \mathbb{R}^n, p(x) = x\}$

Notons $A = \{x \in \mathbb{R}^n, \forall \sigma \in S_n, f_\sigma(x) = x\}$.

$\boxed{\text{On veut montrer que } A = \text{Fix}(p) \quad (\dagger)}$

• 1ère inclusion : si $x \in A$, alors $p(x) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f_\sigma(x)$ dans cette somme chaque $f_\sigma(x)$ vaut x .

Donc $p(x) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} x = \frac{1}{n!} n! x = x$. Donc $x \in \text{Fix}(p)$.

• Réciproquement : si $x \in \text{Fix}(p)$. Soit $\sigma \in S_n$. Par a) on sait que $f_\sigma \circ p = p$. Donc en évaluant en x , $f_\sigma(p(x)) = p(x)$.

Et comme $p(x) = x$, l'égalité précédente devient $f_\sigma(x) = x$. Ceci est vrai pour tout σ , donc $x \in A$.

L'égalité (\dagger) est démontrée et la conclusion.

d) Deux inclusions ;

• $x_0 = \sum_{i=1}^n e_i$ est fixé par tous les endomorphismes f_σ pour $\sigma \in S_n$, puisque $f_\sigma(x_0) = \sum_{i=1}^n e_{\sigma(i)}$

ce qui est la même somme que $\sum_{i=1}^n e_i$ écrite dans un ordre permuté. Donc par c), $x_0 \in \text{Im}(p)$.

• Inclusion réciproque : si $x = \sum_{i=1}^n a_k e_k$ et x est fixé par toutes les f_σ pour $\sigma \in S_n$.

On considère deux indices i et j avec $i \neq j$, et $\sigma = \tau_{i,j}$ la transposition qui échange i et j , alors $f_\sigma(x) = \sum_{k \notin \{i,j\}} a_k e_k + a_i e_j + a_j e_i$.

Comme $f_\sigma(x) = x$, on conclut (par unicité de l'écriture dans une base) que $a_i = a_j$.

Ainsi si $x \in \text{Im}(p)$ alors $a_i = a_j$ pour tout i, j dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ donc $x = a(e_1 + \dots + e_n) = ax_0$ et donc $x \in \text{Vect}(x_0)$.

Conclusion : $\boxed{\text{Im } p = \text{Vect}(x_0)}$

e) (i) On vérifie que ${}^t P = P$.

(ii) Donc p est un projecteur dont la matrice dans une base orthonormale est symétrique : on en déduit que p est un *projecteur orthogonal*. Ce sera un résultat de cours (chap. R4) connu pour les 5/2.

$\boxed{\text{Un projecteur qui est un } \textit{endomorphisme symétrique} \text{ (déf. R4) est un projecteur orthogonal (et récip.)}$

Démontrons ici l'implication qui nous intéresse (sans faire référence à cette notion d' *endomorphisme symétrique*).

On p un projecteur dont la matrice dans la base canonique \mathcal{B} (orthonormée pour le p.s. can.) est symétrique. On veut montrer que $\ker p \perp \text{Im } p$.

Soit $u \in \ker p$ et $v \in \text{Im } p$, on note $X = [u]_{\mathcal{B}}$ et $Y = [v]_{\mathcal{B}}$.

Alors $(u|v) = (X|Y) = {}^t X \cdot Y$.

Or $v = p(v)$ donc $Y = PY$ et $(X|Y) = {}^t X P Y = {}^t P X Y$.

Comme ${}^t P = P$, on en déduit que $(X|Y) = {}^t P X \cdot Y = 0$ car $PX = 0$ puisque $u \in \ker p$.

Ainsi $(u|v) = 0$ et on a bien montré que $\ker p \perp \text{Im } p$. □

(iii)

12) a) Calcul connu donnant le produit scalaire canonique : $\boxed{\text{Tr}({}^t M N) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} m_{i,j} n_{i,j}}$.

b) La forme du a) est exactement celle du p.s. rendant la base $(E_{i,j})$ orthonormée.

c) Pour toute matrice M , $\|M\|_2 = \sqrt{\sum_{1 \leq i, j \leq n} m_{i,j}^2}$. Or pour $M = M_{\sigma}$, M a exactement n entrées valant 1 et les autres sont nulles. Donc $\boxed{\|M_{\sigma}\|_2 = \sqrt{n}}$.

d) Avec les notations de la partie I, $M_{\alpha} - M_{\beta} = \begin{pmatrix} \alpha - \beta & \beta - \alpha \\ \beta - \alpha & \alpha - \beta \end{pmatrix} = (\alpha - \beta) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Donc $\|M_{\alpha} - M_{\beta}\|_2 = |\alpha - \beta| \sqrt{4} = 2|\alpha - \beta|$.

Comme $\alpha, \beta \in [0, 1]$ et $\sup_{\alpha, \beta \in [0, 1]} |\alpha - \beta| = 1$, on conclut que $\boxed{\sup_{\alpha, \beta \in [0, 1]} \|M_{\alpha} - M_{\beta}\|_2 = 2}$

Ceci démontre que $\boxed{\delta(A_2) = 2}$

e) Soit $M \in A_n$. $\|M\|_2^2 = \|L_1\|^2 + \dots + \|L_n\|^2$ (1), où L_i sont les lignes de M et $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne canonique des lignes.

Or on sait que les $a_{i,j}$ sont tous positifs et que $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$ en particulier pour tout i, j , $0 \leq a_{i,j} \leq 1$.

On en déduit que pour tout i, j , $a_{i,j}^2 \leq a_{i,j}$.

Donc pour tout i , $\|L_i\|^2 = \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 \leq \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$.

En sommant ces inégalités, et avec (1), on obtient : $\boxed{\|M\|_2^2 \leq \sum_{j=1}^n 1 = n}$.

f) Soient M et N dans A_n , alors par bilinéarité du p.s. :

$$\|M - N\|_2^2 = \|M\|_2^2 + \|N\|_2^2 - 2(M|N) \quad (1)$$

Là intervient une propriété des $M, N \in A_n$:

toutes les entrées $m_{i,j}$ et $n_{i,j}$ sont positives donc $(M|N) = \sum m_{i,j} n_{i,j} \geq 0$.
Géométriquement A_n est dans un orthant d'espace ($m_{i,j} \geq 0$) donc dans un secteur angulaire « aigu »

Cette positivité de $(M|N)$ donne, dans ((1)) :

$$\|M - N\|_2^2 \leq \|M\|_2^2 + \|N\|_2^2 \quad (2)$$

Or on a vu au e) que $\|M\|_2^2 \leq n$ et $\|N\|_2^2 \leq n$, ce qui dans (2) donne :

$$\|M - N\|_2^2 \leq 2n$$

et la conclusion :

$$\boxed{\|M - N\|_2 \leq \sqrt{2n}}$$

g) Soit $\sigma, \tau \in S_n$. Par déf $(M_\sigma | M_\tau) = \text{Tr}({}^t M_\sigma \cdot M_\tau)$.
 Mais par 9b), ${}^t M_\sigma = M_{\sigma^{-1}}$ et par 9) c), $M_{\sigma^{-1}} \cdot M_\tau = M_{\sigma^{-1} \circ \tau}$. Ainsi :

$$(M_\sigma | M_\tau) = \text{Tr}(M_{\sigma^{-1} \circ \tau}). \quad (1)$$

Pour $\sigma \in S_n$, on cherche donc $\tau \in S_n$ tel que $\text{Tr}(M_{\sigma^{-1} \circ \tau}) = 0$.

Or il suffit de fixer un élément d de S_n telle que M_d soit de trace nulle : par exemple $d : i < n \mapsto i+1, n \mapsto 1$.

Pour chaque $\sigma \in S_n$ si on prend $\tau = \sigma \circ d$, on aura $\sigma^{-1} \circ \tau = d$ et donc $\text{Tr}(M_{\sigma^{-1} \circ \tau}) = 0$ ce qui par (1) donne $\boxed{(M_\sigma | M_\tau) = 0}$.

h) Par bilinéarité du p.s. : $\|M_\sigma - M_\tau\|_2^2 = \|M_\sigma\|_2^2 + \|M_\tau\|_2^2 + 2(M_\sigma | M_\tau)$.

Donc si on choisit σ et τ comme au g) :

$$\|M_\sigma - M_\tau\|_2^2 = \|M_\sigma\|_2^2 + \|M_\tau\|_2^2$$

Par c), on en déduit que :

$$\|M_\sigma - M_\tau\|_2^2 = 2n$$

Ceci montre que le majorant $\sqrt{2n}$ de $\{\|M - N\|_2, M, N \in A_n\}$ obtenu au f), est atteint, c'est donc un maximum.

Par déf c'est donc le diamètre : $\boxed{\delta(A_n) = \sqrt{2n}}$.

En outre, pour toute matrice de permutation M_σ , on a trouvé au g) une matrice M_τ telle que $(M_\sigma | M_\tau) = 0$ et donc (par le raisonnement précédent), $\|M_\sigma - M_\tau\| = \delta(A_n)$. Donc par le résultat de la question 7 partie II, on en déduit que :

$$\boxed{M_\sigma \text{ est point extrémal de } A_n.}$$

13) (Voir les remarques tous azimuth données au début du III de ce corrigé).

a) Chaque fonction : $\varphi_i : M \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{j=1}^n m_{i,j} \in \mathbb{R}$, et chaque fonction : $\psi_j : M \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto$

$\sum_{i=1}^n m_{i,j} \in \mathbb{R}$, est une forme linéaire (somme de formes coordonnées $M \mapsto m_{i,j}$).

Donc $F_n = \bigcap_{i=1}^n \ker(\varphi_i) \cap \bigcap_{j=1}^n \ker(\psi_j)$ est un s.e.v. de $M_n(\mathbb{R})$.

b) (i) Montrons que Φ est injective. Comme Φ est linéaire, il suffit de montrer que $\ker(\Phi) = \{0\}$.

Soit $M \in F_n$ telle que $\Phi(M) = 0$.

• Par déf. de Φ toutes les entrées $(m_{i,j})$ de M avec $i \leq n-1$ et $j \leq n-1$ sont nulles (1).

• Soit $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, montrons que $m_{i,n} = 0$ (2) :

Comme $M \in F_n$, on sait que $\sum_{j=1}^n m_{i,j} = 0$ c'est-à-dire $\sum_{j=1}^{n-1} m_{i,j} + m_{i,n} = 0$ (*).

Or par (1) chaque terme de $\sum_{j=1}^{n-1} m_{i,j}$ est nul, ce qui dans (*) donne $m_{i,n} = 0$ d'où (2).

• Par (1) et (2) on sait maintenant que les $n-1$ premières lignes de M sont nulles.

Comme la somme dans chaque colonne C_j fait 0, la dernière entrée de chaque colonne est nulle aussi et $\boxed{M = 0}$.

(ii) Soit $N \in M_{n-1}(\mathbb{R})$. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ définie par :

• pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $m_{i,j} = n_{i,j}$ (1).

• pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $m_{i,n} = -\sum_{j=1}^{n-1} m_{i,j}$ (2)

• les $n-1$ premières lignes de M étant ainsi définies, posons $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $m_{n,j} = -\sum_{i=1}^{n-1} m_{i,j}$ (3).

Alors ;

- M est bien définie,
- $\Phi(M) = N$ par (1),
- pour chaque $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sum_{i=1}^n m_{i,j} = 0$ par (3).
- pour chaque $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $\sum_{j=1}^n m_{i,j} = 0$ par (2)

$$\text{Enfin } \sum_{j=1}^n m_{n,j} \stackrel{(3)}{=} \sum_{j=1}^n \left(- \sum_{i=1}^{n-1} m_{i,j} \right) = - \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=1}^n m_{i,j} \right) \stackrel{(2)}{=} - \sum_{i=1}^{n-1} (0) = 0.$$

Ceci achève de montrer que $M \in F_n$ et que Φ est *surjective*.

(iii) Avec (i) et (ii) on a montré que Φ est bijective, comme elle est évidemment linéaire, c'est un isomorphisme d'e.v. de F_n dans $M_{n-1}(\mathbb{R})$.

$$\text{Aussi } \dim(F_n) = \dim M_{n-1}(\mathbb{R}) = (n-1)^2.$$

Remarque :

Une autre méthode pour trouver $\dim(F_n)$ à partir du nombre d'équations indépendantes définissant F_n

Avec les notations du 13) a), on remarque que pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$, $\sum_{i=1}^n \varphi_i(M) = \sum_{j=1}^n \psi_j(M) =$

$$\sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} m_{i,j}$$

Ainsi $\sum_{i=1}^n \varphi_i = \sum_{j=1}^n \psi_j$ (égalité de forme linéaires).

Ainsi par exemple φ_n s'écrit comme combinaison linéaire de toutes les $2n-1$ autres et donc F_n peut être défini par $2n-1$ équations linéaires.

Si en plus on montrait qu'elles sont *indépendantes* on conclurait que $\dim(F_n) = n^2 - (2n-1) = (n-1)^2$.

14) a) A la partie I, 4, on a montré que I et J sont les seuls points extrémaux de A_2 . Comme $S_2 = \{\text{id}, \tau\}$ où τ est la transposition qui échange 1 et 2, et que $M_{\text{id}} = I$ et $M_\tau = J$, on obtient bien que les points extrémaux de A_2 sont exactement les matrices M_σ pour $\sigma \in S_2$.

b) On reprend les notations de la remarque à la fin du 13 b).

Ainsi $F_n \cap H = \{M \in H, \varphi_1(M) = \dots = \varphi_{n-1}(M) = \psi_1(M) = \dots = \psi_n(M) = 0\}$ est définie par $2n-1$ équations linéaires dans H qui est un \mathbb{R} -e.v. de $\dim 2n$.

Donc $\dim(F_n \cap H) \geq 2n - (2n-1) \geq 1$. En particulier $F_n \cap H \neq \{0\}$.

c) Notons $I = \{(i_k, j_k), k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket\}$.

Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, en notant $q_{i,j}(t)$ l'entrée (i, j) de Q_t , on a :

$$q_{i,j}(t) = m_{i,j} + tn_{i,j}.$$

(i) Pour $(i, j) \notin I$, $n_{i,j} = 0$ donc $q_{i,j}(t) = m_{i,j} \geq 0$ pour tout t .

Pour $(i, j) \in I$, $m_{i,j} > 0$ donc pour $n_{i,j} \in \mathbb{R}$ fixé, il existe un $\varepsilon_{i,j} > 0$ tel que si $t \in]-\varepsilon_{i,j}, \varepsilon_{i,j}[$, $m_{i,j} + tn_{i,j} > 0$.

(Quelle valeur convient ? Réfléchissez avant de regarder la note en bas de page¹)

En prenant $\varepsilon = \min_{(i,j) \in I} \varepsilon_{i,j}$,

on a trouvé un $\varepsilon > 0$ et que pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ et tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $q_{i,j}(t) \geq 0$.

1. Si $n_{i,j} = 0$ trivial, sinon, $\varepsilon_{i,j} = \frac{m_{i,j}}{2|n_{i,j}|}$ convient.

(ii) Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $t \in \mathbb{R}$ quelconque. On veut montrer que $\sum_{j=1}^n q_{i,j}(t) = 1$ (*).

$$\text{Or } \sum_{j=1}^n q_{i,j}(t) = \sum_{j=1}^n m_{i,j} + t \left(\sum_{j=1}^n n_{i,j} \right) \stackrel{(1)}{=} \sum_{j=1}^n m_{i,j} \stackrel{(2)}{=} 1.$$

L'égalité (1) est vraie car $N \in F_n$ et (2) car $M \in A_n$. D'où (*).

(iii) On montre de même qu'au (ii) que pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ $\sum_{i=1}^n q_{i,j}(t) = 1$.

Conclusion : Avec (i), (ii), (iii), on a bien trouvé un $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $Q_t \in A_n$.

Remarque : Pour (ii) et (iii) L'idée était qu'en translatant un élément de A_n par un vecteur de F_n , on reste toujours dans l'espace affine \mathcal{F}_n (défini dans la remarque du début de la partie III). Pour (i), il y a l'idée d'une « condition ouverte » cf. chap T2.

d) Avec les notations de l'énoncé, par déf. de Q_t , en choisissant $t \in]0, \varepsilon[$, on a $(Q_t + Q_{-t})/2 \stackrel{(*)}{=} M$, avec $Q_t \neq M$ car $t \neq 0$ et $N \neq 0$, et l'égalité (*) avec Q_t et Q_{-t} dans A_n est une *contradiction* avec l'hyp. que M est un point extrémal de A_n .

e) Si dans chaque colonne de M on avait au moins deux termes non nuls alors M aurait au moins $2n$ termes non nuls, ce qui n'est pas.

Donc il existe une colonne de M avec au plus un terme non nul. Comme la somme des entrées des colonnes fait 1, ce terme vaut 1.

f) Comme $m_{r,s} = 1$ et que la somme des éléments de la ligne r fait 1 et que tous sont positifs, tous les autres sont nuls.

g) Suivant les notations de l'énoncé, la somme de chaque ligne de M' est égale à la somme des termes de la ligne correspondante dans M car le terme qu'on rajoute dans M est le terme de colonne s de M (sur une ligne qui n'est pas la ligne r), qui est nul.

De même pour les colonnes.

Bien sûr les entrées de M' sont positives.

Donc $\boxed{M' \in A_{n-1}}$.

Par l'absurde, si M' n'était pas un point extrémal, on aurait deux éléments A', B' de A_{n-1} distincts tels que $M' = \frac{A' + B'}{2}$.

Mais alors on fabrique à partir de A' une matrice A dans A_n en insérant une ligne r et une colonne s avec un 1 à l'entrée (r, s) et des 0 ailleurs et de même pour B' une matrice B .

Alors on a $M = \frac{A + B}{2}$ avec A, B dans A_n et $A \neq B$. Donc M ne serait pas un point extrémal de A_n , *contradiction*.

Donc $\boxed{M' \text{ est bien un point extrémal de } A_n}$.

h) On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à M' donc $M' = M'_\sigma$ avec $\sigma' \in S_{n-1}$.

Par le même processus de rajout de ligne et de colonne qu'au g), (au même endroit) on montre que $M = M_\sigma$ où $\sigma(s) = r$ i.e. $f_\sigma(e_s) = r$.

Culturel : on a démontré le théorème de « Birkhoff-Von Neumann » :

Les points extrémaux de l'ensemble des matrices bistochastiques sont exactement les matrices de permutations.