Appendice : dém. non rédigées en cours

II 4) b) Caractérisation des ouverts induits (ou ouverts relatifs)

Prop. Soit $A \subset E$ et un sous-ensemble U de A. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
(1) U est un voisinage dans A de chacun de ses points.
(2) il existe un ouvert Ω de E tel que $U = \Omega \cap A$.
Si ces conditions sont vérifiées, on dit que U est un *ouvert de A*

Dém. (En fait déjà rédigée en cours à part la fin).

• (2) $\Rightarrow$ (1) : on a $U = \Omega \cap A$ avec Ω un ouvert de E. Soit $x \in U$. Comme Ω est un ouvert de E il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $B_o(x,\varepsilon) \subset \Omega$. Alors $B_o(x,\varepsilon) \cap A \subset \Omega \cap A = U$.

Donc $B_{A,o}(x,\varepsilon) := B_o(x,\varepsilon) \cap A$ est inclus dans U, ainsi U est bien un voisinage de x dans A.

• (1) $\Rightarrow$ (2) : pour chaque $x \in U$, on sait que U est un voisinage de x dans A, donc il existe un $\varepsilon_x > 0$ tel que $B_o(x,\varepsilon_x) \cap A \subset U$ (†).

On considère $\Omega = \bigcup_{x\in U} B_o(x,\varepsilon_x)$.

Par déf. Ω est un ouvert de E comme réunion de boules ouvertes de E.

Montrons que $U \overset{(*)}{=} \Omega \cap A$

Première inclusion : pour tout $x \in U$, $x \in B_o(x,\varepsilon)$ donc $x \in \Omega$. Donc $U \subset \Omega$ et comme par déf. $U \subset A$, on a bien $U \subset \Omega \cap A$.

Seconde inclusion : $\Omega \cap A = \left(\bigcup_{x\in U} B_o(x,\varepsilon_x)\right) \bigcap A = \bigcup_{x\in U} (B_o(x,\varepsilon_x) \cap A)$. Or par (†) chaque $(B_o(x,\varepsilon_x) \cap A)$ est inclus dans U donc la réunion est aussi incluse dans U. □

II 4) c) Caractérisation des fermés induits (ou fermés relatifs)

Prop-Déf. Soit $A \subset E$ et $F \subset A$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) $A \setminus F$ est ouvert dans A,

(2) il existe un fermé G de E tel que $F = A \cap G$,

(3) pour toute suite $(a_n) \in F^{\mathbb{N}}$, si $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \in A$ alors $a \in F$.

On dit que F est un fermé de A ssi ces propriétés sont vérifiées.

Dém.

• (1) $\Rightarrow$ (2) : on sait que $A \setminus F$ est ouvert dans A, donc par la caractérisation des ouverts de A, on a un ouvert Ω de E tel que $A \setminus F = \Omega \cap A$.

Mais alors $F = A \setminus (A \setminus F) = A \setminus (\Omega \cap A) = A \setminus \Omega = A \cap (E \setminus \Omega)$ (†).

Prenons alors $G = E \setminus \Omega$. Par déf G est un fermé de E et par ce qui précède (cf. (†)), on a : $F = A \cap G$ d'où (2).

• (2) $\Rightarrow$ (3) : on a $F = A \cap G$ avec G un fermé de A. Soit $(a_n) \in F^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \in A$.

Comme $(a_n) \in G^{\mathbb{N}}$ et que G est fermé dans E, on sait (caractérisation séquentielle des fermés de E), que $a \in G$.

Donc $a \in A \cap G$ donc $a \in F$ d'où (3).

• (3) $\Rightarrow$ (1) : par contraposée, montrons que NON(1) $\Rightarrow$ NON(3).

On a donc $A \setminus F$ qui n'est pas un ouvert de A donc on a un élément $a \in A \setminus F$ pour lequel $A \setminus F$ n'est *pas* un voisinage de a dans A ce qui signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, $B_o(x,\varepsilon)$ rencontre $A \setminus (A \setminus F) = F$.

En prenant $\varepsilon = 1/n$, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on fabrique une suite $(a_n) \in F^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \in A$ et $a \notin F$, ce qui est bien la négation de (3). □

III 2) b) Caractérisation globale de la continuité :

Se valent :
(1) $f : A \to F$ est continue
(2) pour tout ouvert U de F, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de A
(3) pour tout fermé G de F, $f^{-1}(G)$ est un fermé de A.

Dém.

• (1) ⇒ (2) : soit U un ouvert de f et soit $a \in f^{-1}(U)$. Par la propriété du III 1) c) (traduction de la déf. de la limite en terme de voisinages), comme U est un voisinage de $f(a)$, $f^{-1}(U)$ est un voisinage de a de A. Ceci étant vrai pour tous les $a \in f^{-1}(U)$, on conclut que $f^{-1}(U)$ est un voisinage dans A de chacun de ses points, donc $f^{-1}(U)$ est un ouvert de A.

• (2) ⇒ (1) : soit $a \in U$ on veut montrer que f est continue en a. Par déf. de la continuité, cela revient à montrer que pour chaque $\varepsilon > 0$, $f^{-1}(B_o(f(a), \varepsilon)$ contient un voisinage de a dans A. Mais cela on le sait par (2) puisque $f^{-1}(B_o(f(a), \varepsilon))$ est ouvert de A comme préimage d'un ouvert.

• (2) ⇒ (3) : soit G un fermé de F alors $U = F \setminus G$ est un ouvert de F, donc par (2), $f^{-1}(U)$ est un ouvert de A.

Or $G = F \setminus U$, donc $f^{-1}(G) = f^{-1}(F \setminus U) = A \setminus f^{-1}(U)$ par propriété de l'image réciproque.

Comme $f^{-1}(U)$ est un ouvert de A, $A \setminus f^{-1}(U)$ est un fermé de A donc $f^{-1}(G)$ est bien un fermé de A.

• (3) ⇒ (2) : exactement comme l'implication précédente en échangeant les rôles des fermés et des ouverts.