

Solutions manquantes pl. R0

Exercice 13. Soit E un e.v. de dim. p et F un e.v. de dim. n . Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, E)$ tels que $f \circ g$ soit un projecteur de rang p .

Montrer que $g \circ f = \text{id}_E$.

N.B. L'exercice est le plus souvent donné sous la forme matricielle suivante : $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{p,n}(\mathbb{K})$ sont telles que AB est la matrice d'un projecteur de rang p (parfois donné très concrètement). Montrer que $BA = I_p$.

Solution 13 Rappelons d'abord que si $a \in \mathcal{L}(E, F)$ on sait que $\text{rg}(a) \leq \min(\dim(E), \dim(F))$.

Remarquons ensuite que comme $f \circ g \in \mathcal{L}(F)$ est de rang p , on a ici $p \leq n$.

Lemme 1 : Pour deux applications linéaires a et b , on a toujours $\text{rg}(a \circ b) \leq \min(\text{rg}(a), \text{rg}(b))$.

Avec le lemme 1, on sait donc ici que $\min(\text{rg}(f), \text{rg}(g)) \geq p$ et comme $\text{rg}(f)$ et $\text{rg}(g)$ sont inférieurs ou égaux à p , on a $\text{rg}(f) = \text{rg}(g) = p$.

Lemme 2 Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est injective, alors f admet un inverse à gauche $f_1 \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que $f_1 \circ f = \text{id}_E$.

Si $g \in \mathcal{L}(F, E)$ est surjective, alors elle admet un inverse à droite $g_1 \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $g_1 \circ g = \text{id}_F$.

Mais alors en appliquant le lemme 2 à f et g de l'exercice, comme $f \circ g \circ f \circ g = f \circ g$ en composant à gauche par f_1 et à droite par g_1 , on obtient $g \circ f = \text{id}$. □