Exercice 1. Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$. Donner une C.N.S. sur $\mathrm{Tr}(A)$ et $\det(A)$ pour que A soit trigonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$.

Exercice 2. Soit $E = \mathbb{R}^{2n+1}$ et $(e_1, \dots, e_{2n+1})$ sa base canonique. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par $\begin{cases} \forall\, i \neq n+1, \quad u(e_i) = e_1, \\ u(e_{n+1}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{2n+1} e_i. \end{cases}$.

L'endomorphisme u est-il diagonalisable ? Trigonalisable ?

Trigonalisation précisée pour les matrices 3×3 (Jordan)

Exercice 3. Soit E un K-e.v. de dim. 3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ non diagonalisable, mais trigonalisable.

a) Combien u peut-il avoir de valeurs propres ?

b) On se place dans le cas où u a deux valeurs propres α et β avec $\chi_u = (X-\alpha)(X-\beta)^2$.

Démontrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$.

c) On suppose désormais que u admet une unique valeur propre, qu'on note λ et que $u \neq \lambda\,\mathrm{id}$.

(i) Que dire de $(u - \lambda\,\mathrm{id})^3$? En fait les deux questions qui suivent sont basées sur la réduction de $v = u - \lambda\,\mathrm{id}$

(ii) Si $(u - \lambda\,\mathrm{id})^2 \neq 0$, montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

(iii) Si $(u - \lambda\,\mathrm{id})^2 = 0$ montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Exercice 4.

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Expliciter des matrices $T \in TS_3(\mathbb{R})$ et $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PTP^{-1}$.

Application de la trigonalisation

Exercice 5. a) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dans $\mathbb{C}$ ayant la propriété que $\forall\, k \geq 2$, $|\lambda_k| < |\lambda_1|$.

Montrer que $\dfrac{\mathrm{Tr}(A^{k+1})}{\mathrm{Tr}(A^k)} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \lambda_1$.

b) Comment pourrait-on utiliser le résultat précédent pour calculer des valeurs approchées de zéros de polynômes ?

Exercice 6. a) Soit $T \in TS_n(K)$ et $C = \{M \in TS_n(K),\ TM = MT\}$. Montrer que $\dim(C) \geq n$.

Indication – Considérer $M \mapsto TM - MT$.

b) En déduire que pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, le commutant de A est de dim. au moins n

Exercice 7. Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $k.M$ est semblable à M. Montrer que M est nilpotente.

Racines de matrices en tout genre

Exercice 8. a) Montrer que si N est nilpotente dans $M_n(\mathbb{C})$ et $M = I + N$ alors $R = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{1/2}{k} N^k$ vérifie $R^2 = M$.

b) En déduire que pour toute matrice inversible $A \in GL_n(\mathbb{C})$, il existe une matrice $B \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $B^2 = A$.

c) Soit $T \in M_n(K)$ telle que pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$ $T(i, i+1) = 1$ et $T(i,j) = 0$ sinon. Montrer qu'il n'existe pas de matrice R telle que $R^2 = T$.

Exercice 9. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ diagonalisable ayant toutes ses valeurs propres strictement positives. Montrer que A admet une unique racine carrée R diagonalisable à valeurs propres positives.

Généralisation pour l'unicité : si M et N sont deux matrices dz dans $M_n(K)$ vérifiant $P(M) = P(N)$ avec $P \in K[X]$ qui est *injectif* sur $\mathrm{Sp}(M) \cup \mathrm{Sp}(N)$ alors $M = N$.